DBJ Discussion Paper Series, No. 1213

経済研究者のためのウィーナー過程入門

大瀧雅之
（東京大学社会科学研究所）

2013 年 3 月

経済研究者のためのウィーナー過程入門

大瀧雅之

東京大学社会科学研究所

要旨

ブラウン運動に関する基礎的知識を，平易な離散時間の二項分布に基づき獲得する．そしてその知識を応用して，もっとも簡単な場合の伊藤の公式を理解する．

1　予備知識

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

2. Sterling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

1.1　1. の公式の証明

$I \equiv \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ とおく．このとき，

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \tag{1}$$

である．ここで (x, y) を極座標表示して，

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

とする．このとき，

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

である．

ところで一般に，一次変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{4}$$

において，(u, v) 平面上の面積 1 の正方形の内部，$|x| \leq 1$，$|y| \leq 1$ は，(x, y) 平面上の平行四辺形 $OABC$ (図 1 参照) の内部に写る．この平行四辺形の面積は Ω は，$\Omega = OA \cdot OC \cdot \sin\theta$ であるが，

$$\sin\theta = \sqrt{1 - [\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{OA \cdot OC}]^2}$$

であることから,

$$\begin{aligned}\Omega &= \sqrt{OA \cdot OC]^2 - [\vec{OA} \cdot \vec{OC}]^2} = \sqrt{[a^2+c^2][b^2+d^2] - [ab+cd]^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd} = \sqrt{[ad-bc]^2} = |ad-bc| \qquad (5)\end{aligned}$$

である.

したがって (2) のような極座標表示への座標変換によって,(r, θ) 平面上の単位面積は,(3) と (5) を考え併せることで,(x, y) 平面上の

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

だけの面積の平行四辺形に対応する [1].つまり (x, y) 平面上の単位面積 $dxdy$ は,(r, θ) 平面上の単位面積 $drd\theta$ の r 倍に相当することがわかる.この性質を鑑みると (1) は,

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} re^{\frac{-r^2}{2}} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} re^{\frac{-r^2}{2}} dr = -2\pi[e^{-\frac{r^2}{2}}]_0^{+\infty} = 2\pi\end{aligned}$$

よって,

$$I = \sqrt{2\pi}$$

である.

1.2 Stirling の公式を証明する

Stirling の公式は,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad n \to \infty \qquad (6)$$

を主張するものである.ここで $\sim$ は $n \to \infty$ で,右辺と左辺の比が 1 に収束することを意味している.

さて,

$$a_n \equiv \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

と定義すると,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = e[1 - \frac{1}{n}]^{-n}[1 - \frac{1}{n}]^{-\frac{1}{2}}$$

であるから,

$$\ln a_n - \ln a_{n-1} = 1 + \ln[1 - \frac{1}{n}]^{-n} - \frac{1}{2}\ln[1 - \frac{1}{n}]$$

[1]積分における変数変換に関する厳密な証明は,例えば高木 (1961) を参照のこと.

$n \to \infty$ の極限をとると，

$$\lim_{n \to +\infty} [\ln a_n - \ln a_{n-1}] = 1 - 1 = 0 \tag{7}$$

であり，$\{\ln a_n\}$ が Cauchy 列であり．ある一定の極限 κ に収束することが分かる．すなわち，

$$n! \sim e^{\kappa} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad n \to \infty \tag{8}$$

である．e^{κ} の値が $\sqrt{2\pi}$ であることは，後に示す.

2 中心極限定理

一回当たりのステップの幅が 1 である離散型のランダムウォークを考える [2]．このとき $2n$ 時間後に，$x = 2j$ の位置にある確率は，

$$_{2n}C_{n+j} 2^{-2n} = \frac{2n! \cdot 2^{-2n}}{[n+j]![n-j]!} \tag{9}$$

である．これに Sterling の公式 (8) を代入すると，

$$\begin{aligned}
_{2n}C_{n+j} 2^{-2n} &\sim \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2n}}{e^{\kappa}[n+j]^{n+j+\frac{1}{2}}[n-j]^{n-j+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2} n^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{\kappa}[n^2-j^2]^{n}[n+j]^{j}[n-j]^{-j}[n^2-j^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&= e^{-\kappa}\sqrt{\frac{2}{n}}[1-\frac{j^2}{n^2}]^{-n}[1+\frac{j}{n}]^{-j}[1-\frac{j}{n}]^{j}[1-\frac{j^2}{n^2}]^{-\frac{1}{2}} \qquad (10)
\end{aligned}$$

である．このとき $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k$ とすると，$E[S_n^2] = n$ であることから，一歩ごとの飛躍の距離は，$\sqrt{n}$ のオーダーであると考えられる．したがって，

$$j \equiv r\sqrt{n}$$

と考え，これを (10) に代入すると，

$$_{2n}C_{n+j} 2^{-2n} \sim e^{-\kappa}\sqrt{\frac{2}{n}}[1-\frac{r^2}{n}]^{-n}[1+\frac{r}{\sqrt{n}}]^{-r\sqrt{n}}[1-\frac{r}{\sqrt{n}}]^{r\sqrt{n}}[1-\frac{r^2}{n}]^{-\frac{1}{2}}$$

である．このとき $n \to \infty$ で，

$$\lim_{n\to\infty}[1-\frac{r^2}{n}]^{-n} = e^{r^2}, \quad \lim_{n\to\infty}[1+\frac{r}{\sqrt{n}}]^{-r\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}[1-\frac{r}{\sqrt{n}}]^{r\sqrt{n}} = e^{-r^2}$$

[2] ここでの証明は Lawler (2010) を参考としている.

であるから，

$$\begin{aligned}\Pr[a\sqrt{2n} \le S_{2n} \le b\sqrt{2n}] &= e^{-\kappa} \lim_{n\to\infty} \sum_r \sqrt{\frac{2}{n}} e^{-r^2} \\ &= e^{-\kappa} \lim_{n\to\infty} \sum_j \sqrt{\frac{2}{n}} e^{-\frac{j^2}{n}} \\ &= e^{-\kappa} \lim_{n\to\infty} \sum_j \sqrt{\frac{2}{n}} e^{-\frac{[\sqrt{\frac{2}{n}}j]^2}{2}} \qquad (11)\end{aligned}$$

ただし j は

$$a\sqrt{2n} \le 2j \le b\sqrt{2n} \qquad (12)$$

の範囲である．ここで，

$$x \equiv \sqrt{\frac{2}{n}} j$$

とすると，(12) は，

$$a \le x \le b$$

の範囲であり，(11) は $n \to \infty$ で，

$$\Pr[a\sqrt{2n} \le S_{2n} \le b\sqrt{2n}] = e^{-\kappa} \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{a\le x\le b} \Delta x e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\kappa} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (13)$$

である．

　ところで，先に 1.1 で証明した公式より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

であるから，

$$\Pr[-\infty \le x \le +\infty] = 1 = e^{-\kappa}\sqrt{2\pi}$$

であり，$e^{\kappa} = \sqrt{2\pi}$ であることも証明された．この事実と (13) から，次の中心極限定理が証明されたことになる．すなわち，

定理 1 $n \to \infty$ で

$$\Pr[a \le \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \le b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (14)$$

である．すなわち，$\dfrac{S_{2n}}{\sqrt{2n}}$ は，$n \to \infty$ で標準正規分布に収束する．

3　ウィーナー過程：ブラウン運動の方程式

3.1　ウィーナー過程の考え方

ウィーナー過程 (水の中の花粉のランダムな動き：ブラウン運動を記述する確率過程) は，先の二項分布の累積和を連続時間に拡張したものである．ここで時間 t を固定して，　区間 $0 \le \tau \le t$ を $2n$ に分割する．すなわち，

$$t = 2n \cdot \Delta t$$

である．微小時間内 $\Delta t = \frac{t}{2n}$ 内に動ける距離 Δx は，先ほどの単位時間を 1 とした場合に比べ小さくなると考えられるから，

$$S_{2n,1} \approx \Delta x[\frac{2n}{t}]S_{2n,\Delta t}$$

としてもよいだろう．このとき，

$$\begin{aligned}&E_t[[\Delta x S_{2n,\frac{\Delta x}{\Delta t}}]^2] = [\Delta x]^2[\frac{2n}{t}]^2 E_t[[S_{2n,\frac{\Delta x}{\Delta t}}]^2] = [\frac{\Delta x}{\Delta t}]^2 E_t[[S_{2n,\frac{\Delta x}{\Delta t}}]^2] \\ &= E_t[[S_{2n,1}]^2] = 2n \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{2n} = \sqrt{t}\end{aligned}$$

である．すると中心極限定理 (14) から，このように微小時間 $\Delta t \equiv \frac{t}{2n}$ の間で動く確率変数 W_t （t 時間後の花粉の位置）は，当初その花粉が原点にいたとすれば，正規分布 $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$ に従うことになる．

このようなブラウン運動の方程式は，

$$W(t:\omega) - W(0) \equiv \sum_{j=1}^{t}\Big[W(j:\omega) - W(j-1:\omega)\Big] \equiv \int_0^t dW(\tau:\omega) \qquad (15)$$

という形で定義される．右辺がウィーナー積分と呼ばれるものである．のちに伊藤の公式を導く際に大変重要な役割を果たすことになる．平たく言えば，ウィーナー積分はブラウン運動の軌跡を時間について足し合わせたものである．

3.2　ウィーナー過程の重要な性質

次の二つの性質は，伊藤の公式を導くうえで，非常に重要である．

定理 2

$$Q_{t,n}(\omega) \equiv \sum_{j=1}^{nt}[W(t_{\frac{j}{n}}:\omega) - W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)]^2$$

とする．このとき，ほとんどすべての ω について，すなわち確率 *1* で，

$$\lim_{n\to+\infty} Q_{t,n}(\omega) = t \qquad (16)$$

である．

証明の概要

大数の強法則の応用である．

$$W(t_{\frac{j}{n}}:\omega)-W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)$$

はウィーナー過程の性質から，独立で同一の分布にしたがう．よってその二乗も同じ性質を持つ．またその期待値は $\frac{1}{n}$ である．すると $S_n(t:\omega)\equiv n\frac{Q_{t,n}(\omega)}{n}$ は，大数の強法則から確率 1 で，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{n\cdot nt\cdot\dfrac{1}{n}}{n}=t=\lim_{n\to+\infty}Q_{t,n}(\omega)$$

である．　この定理の系である次の定理も重要である．

定理 3

$$W(t,\omega)-W(0,\omega)\equiv\sum_{j=1}^{nt}[W(t_{\frac{j}{n}}:\omega)-W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)]$$

とする．このとき，ほとんどすべての ω について，すなわち確率 *1* で，

$$\lim_{n\to+\infty}|W(t,\omega)-W(0,\omega)|=\sqrt{t} \tag{17}$$

である．

証明の概要

$$W(t_{\frac{j}{n}}:\omega)-W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)$$

はウィーナー過程の性質から，独立で同一の分布にしたがう．またその期待値は 0 である．すると $S'_n(t:\omega)\equiv n\sum_{j=1}^{nt}|W(t_{\frac{j}{n}}:\omega)-W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)|$ は，大数の強法則から確率 1 で，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{Q_{t,n}}=\sqrt{t}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{nt}|W(t_{\frac{j}{n}}:\omega)-W(t_{\frac{j-1}{n}}:\omega)|$$

である，

3.3　伊藤の公式

$S(t:\omega)$ が，

$$S(t:\omega)-S(0)\equiv\int_0^t dS(\tau:\omega)=\mu t+\sigma\int_0^t dW(\tau:\omega) \tag{18}$$

という確率過程に従うとき，無限回微分可能な関数 $f(S_t)$ が

$$f(S(t:\omega))-f(S(0))\equiv\int df(S(\tau:\omega))=\int_0^t[\mu+\frac{\sigma^2 f''(S_\tau)}{2}]d\tau+\sigma\int_0^t f'(S_\tau)dW(\tau:\omega) \tag{19}$$

という確率過程に従うことを主張するのが伊藤の公式のもっとも簡単な場合である．この公式の著しい特徴は，右辺第二項に $\dfrac{\sigma^2 f''(S_\tau)}{2}$ が現れることであるが，この性質はまさに先ほど述べた (16) に基づいている．

さてこの公式は，いかなるプロセスにより導かれるのだろうか．以下ではその概略を解説する．まず区間 $[0,t)$ を $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{t-1} < t_n = t$ の n 個の区間に分割する．そのうえで各々の区間について f を二次の項までテイラー展開する．すると，

$$f(S_k) = f(S_{k-1}) + f'(S_{k-1})[S_k - S_{k-1}] + \frac{f''(S_{k-1})}{2}[S_k - S_{k-1}]^2 + o([S_k - S_{k-1}]^2) \tag{20}$$

である．上式に (18) を代入すると，

$$\begin{aligned} \Delta f(S_k) \equiv f(S_k) - f(S_{k-1}) &= f'(S_{k-1})[\mu[\Delta t_k + \sigma \int_{t_{k-1}}^{t_k} dW(\tau:\omega)] \\ + \quad & \frac{f''(S_{k-1})}{2}[\mu^2[\Delta t_{t,k}]^2 + [\Delta W_{t,k}]^2 + 2\Delta t_{t,k}\Delta W_{t,k} + o([S_k - S_{k-1}]^2) \end{aligned}$$

である．ここで，

$$\Delta t_k \equiv t_k - t_{k-1}, \quad \Delta W_{t,k} \equiv W(t_{k-1}:\omega) - W(t_{k-1}:\omega)$$

である．

さて以上から，

$$\begin{aligned} f(S_t) - f(S_0) &= \sum_{j=1}^{n} \Delta f(S_k) = \sum_{j}^{n} f'(S_{k-1})[\mu\Delta_{t,k} + \sigma \int_{t_{k-1}}^{t_k} dW(\tau:\omega)] \\ + \quad & \sum_{j=1}^{n}[\frac{f''(S_{k-1})}{2}[\mu^2[\Delta t_{t,k}]^2 + \sigma^2[\Delta W_{t,k}]^2 + 2\sigma\Delta t_{t,k}\Delta W_{t,k} + o([S_k - S_{k-1}]^2)] \end{aligned}$$

右辺第一，第二項は積分の定義より，$n \to +\infty$ で

$$\mu \int_0^t f'(S_\tau)d\tau, \quad \int_0^t f'(S_\tau)dW(\tau:\omega)$$

に収束 [3]．また，

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f''(S_{k-1})}{2}[\mu^2[\Delta t_{t,k}]^2 \leq \mu^2 \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{f''(S_{k-1})}{2}[\max_k[\Delta t_{t,k}]\Big] \cdot [\Delta t_{t,k}]$$

であるが，$n \to +\infty$ で $\frac{f''(S_{k-1})}{2}[\max_k[\Delta t_{t,k}]] = 0$ である．したがって積分の定義より，この項は 0 へ収束する．

[3] 右辺第二項は厳密にはウィーナー積分ではなく，伊藤積分と呼ばれる積分である．実は伊藤清教授の業績は，伊藤の公式そのものよりも，この伊藤積分を関数空間における巧みなノルムの入れ替え（極限の定義の入れ替え）により定義したところにある，この平易な解説については，大瀧 (1994) の第一章を参照されたい．

さらに (17) より，

$$-\sum_{k=1}^{n}[\max_k \sqrt{\Delta t_k}]\Delta t_{t,k} \le \sum_{k=1}^{n}\Delta t_{t,k}\Delta W_{t,k} \le \sum_{k=1}^{n}[\max_k \sqrt{\Delta t_k}]\Delta t_{t,k}$$

であるが，$n \to +\infty$ で $\max_k \sqrt{\Delta t_k} \to 0$ であるので，積分の定義より，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(S_{k-1})}{2}\Delta W_{t,k}\Delta t_{t,k} = 0$$

である．

最後に (16) より，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2 f''(S_{k-1})}{2}[\Delta W_{t,k}]^2 = \frac{\sigma^2}{2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f''(S_{k-1})[\Delta t_{t,k}] \equiv \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t f''(S_\tau)d\tau$$

である．したがって (19) が成立することがわかる．

3.4 伊藤過程と一般的な伊藤の公式

伊藤過程は，ウィーナー過程の一般化である．ドリフト μ や分散 σ が， S_t, t の関数であっても，(19) が成立することを主張するものである．すなわち，S_t が，

$$S(t:\omega) - S(0) \equiv \int_0^t dS(\tau:\omega) = \int_0^t \mu(S_\tau,\tau)d\tau + \int_0^t \sigma(S_\tau,\tau)dW(\tau:\omega) \quad (21)$$

に従う時，

$$\int df(S(\tau:\omega)) = \int_0^t [\mu(S_\tau,\tau)f'(S_\tau) + \frac{\sigma^2(S_\tau,\tau)f''(S_\tau)}{2}]d\tau + \int_0^t f'(S_\tau)\sigma(S_\tau,\tau)dW(\tau:\omega) \quad (22)$$

が成立する．

簡単な応用例

株価が S_t が，

$$\int_0^t dS_\tau = \mu\int_0^t S_\tau d\tau + \sigma\int_0^t S_\tau dW(\tau:\omega)$$

に従うとき，すなわち株価の対数値 $s_t \equiv \ln S_t$ は伊藤の公式を用いることにより，

$$\int_0^t ds_\tau = \int_0^t [\mu - \frac{\sigma^2}{2}]d\tau + \sigma\int_0^t dW(\tau:\omega) \quad (23)$$

となる．すなわち株価の対数値は正規分布 $\mathcal{N}(s_0 + [\mu - \frac{\sigma^2}{2}]t, \sigma\sqrt{T-t})$ に従う．

計算過程

$f(S) \equiv \ln S$ とおく．すると伊藤の公式 (22) より，

$$\int_0^t d\ln S_\tau = \int_0^t [\mu S_\tau \cdot \frac{1}{S_\tau} + \frac{\sigma^2 S_\tau^2}{2}[-\frac{1}{S_\tau^2}]]d\tau + \int_0^t \sigma S_\tau \cdot \frac{1}{S_\tau} dW(\tau:\omega)$$

である．したがって，(23) が成立することを確認できる．なおこの関係式が,Black-Scholes 公式の「命」であることは，後に明らかにされる．

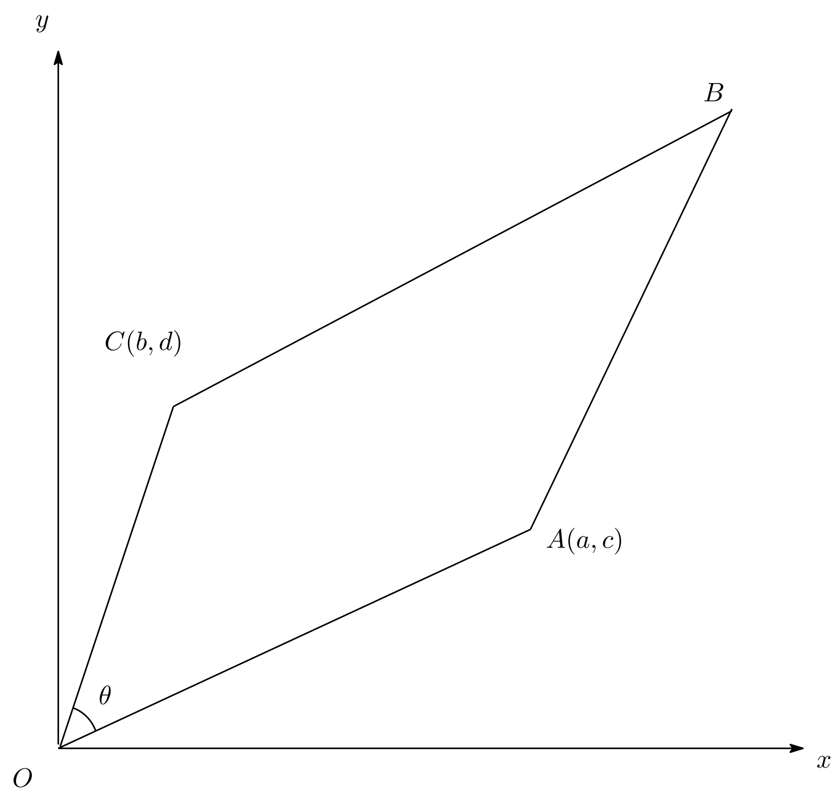
References

[1] 大瀧雅之 (1994),『景気循環の理論 : 現代日本経済の構造』，東京大学出版会.

[2] 大瀧雅之 (2005),『動学的一般均衡のマクロ経済学 : 有効需要と貨幣の理論』，東京大学出版会.

[3] 高木貞治 (1961),『解析概論』（改訂第三版），岩波書店.

[4] G. F. Lawler (2010), *Random Walk and Heat Equation*, American Mathematical Society.



y
B
$C(b,d)$
$A(a,c)$
θ
O
x