DBJ Discussion Paper Series, No. 1303

最適負債制御問題

吉村浩一
（日本政策投資銀行設備投資研究所）
渡邉修士
（日本大学経済学部）

2013 年 5 月

当Ｄiscussion Ｐaper は、執筆者個人の暫定的な研究であって、関心ある研究者との議論等の為に、当設備投資研究所に於いて作成されたものである。もとより、内容、意見については、執筆者個人に属するものであり、日本政策投資銀行の見解を反映したものではない。また、未定稿という性格から、引用、複製等については、執筆者の承諾を得られたい。

最適負債制御問題

吉村浩一
（日本政策投資銀行設備投資研究所）
渡邉修士
（日本大学経済学部）

2013 年 5 月

要約

現代の経済社会において政府債務をはじめとして経済主体が巨額の負債を抱えるリスクが大きな問題となっており，その制御可能性を検討することは最重要の経済問題である．本研究では，債務者は将来コストの割引現在価値が最小になるよう償還額を定めるとする最適負債制御モデルを提示する．ここで将来コストは負債残高と償還額の望ましい水準からのギャップを加重した主観的コストである．

債務者の負債制御ポリシーはモデル内部の一連の主観的パラメータにより表現される．基本モデルに負債残高上限と償還額上限からなる許容条件を付加すると，主観的パラメータの条件次第で許容制御不能の状態に陥るケースが現れる．かかる制御不能の状態をデフォルトと定義するとき，債務者の負債制御ポリシーが近視眼的な場合にデフォルト発生の可能性が高まることや，デフォルト回避の可能性として将来の償還能力の予測についての慎重な評価が重要な役割を果たすことが明らかになる．

最適制御された負債残高と現実の残高の誤差を最小にする主観的パラメータを探索する手法をカリブレーションという．こうして得られる各債務者の主観的パラメータを用いることでその負債制御ポリシーの健全性比較等の定量的な分析が可能となる．

1.　はじめに

現代の経済社会において政府債務をはじめとして巨額の負債の制御可能性を検討することは最重要の経済問題である．多くの国際経済問題は巨大企業倒産やソブリン債危機が震源となっている．リーマン・ブラザーズ破綻時の負債総額は過去の巨額倒産と桁違いであったが，政府の負債額はそれを優に上回る水準となっている．複雑極まりないこれら問題を検討するとき，ステップ・バイ・ステップで問題構造を解明していくボトム・アップ・アプローチが有効である．

本研究の第１のテーマは，できるだけ単純化された負債残高制御理論モデルを示すことにある．これにより今日の負債問題に焦点を絞って本質を解明することが可能となる．例えば，政府の場合の負債残高を制御するためには，税制や社会保障制度等複雑な調整が求められるが，本研究ではこうした点を捨象し償還額としての制御を考えている．

政府や企業の巨額のデフォルト発生は経済社会に大きな混乱をもたらし，安定した経済活動の継続を妨げる．不良債権処理の金融技術は日々進歩しているが，それはデフォルト発生後の利害調整プロセスにおける技術である．より重要なことは事前にデフォルト発生のプロセスを解明して，デフォルト発生の回避可能性を検討することにあり，これが第２のテーマである．

そして本研究の最後で，負債制御モデルを使って，現実の負債残高の動きから，それぞれの経済主体の負債制御ポリシー比較を試みたい．分析の前提となるデータベースの構築，統計解析における技術改良ないし応用分析対象の拡張などの発展可能性はあるが，本研究はそれらに取り組むための基礎的ツールの提供を目的とする．

2. 現実経済における負債残高の動き

モデル分析に立ち入る前に，政府負債残高の動きと国内企業の負債残高の動きを概観しておこう．

2.1. 政府負債の動き

図 1 は，対 GDP 比で示した一般政府の純負債残高の動き（1991 年～2011 年）である．

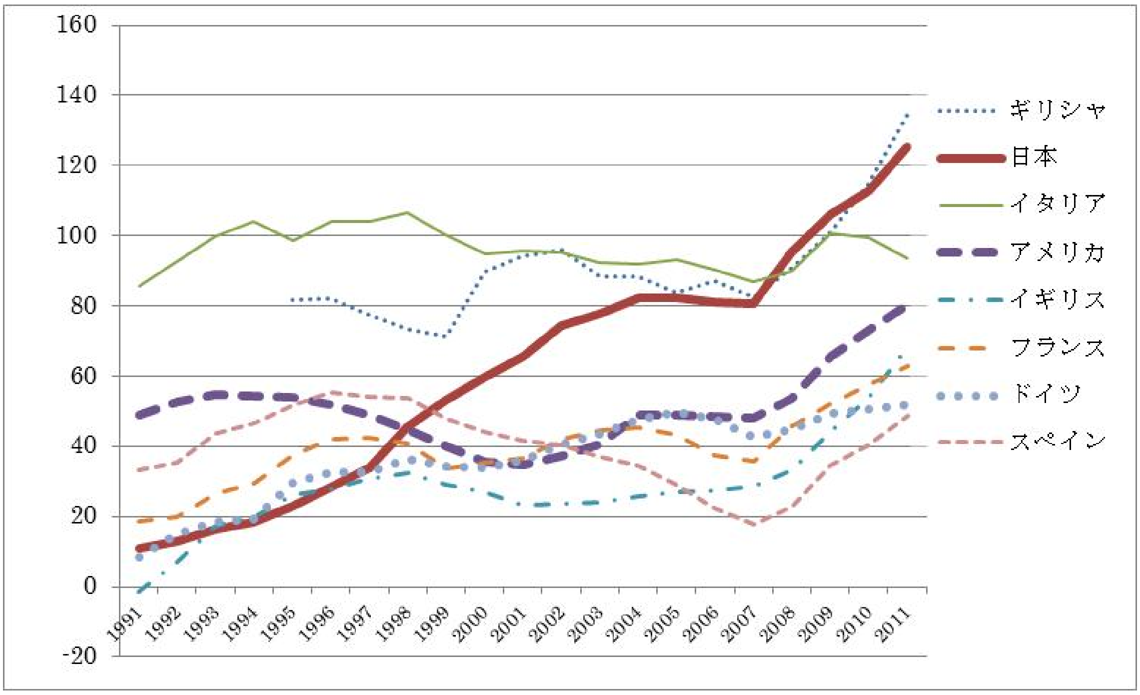
例えば，日本政府の負債残高は 1991 年当時は各国比較で最も低いレベルにあった．しかし，その後は単調に増加し，最近ではギリシャに次ぐ水準になっている．これは偏にバブル崩壊後の 20 年以上に及ぶ経済の不振を背景とした税収の伸び悩み等による歳入の不足と，景気・雇用対策や高齢化の進展等を反映した社会保障費の著増，かかる財政構造の変化に対応して迅速に実施されるべき税制改正の遅れの結果，赤字国債発行への依存が常態化したことによるものと言える．このような負債残高増大に対してかなり緩い制御が長期にわたり問題点を指摘されながらも維持できたのは，国内の貯蓄が国債の増発を吸収可能であったことや低金利によって国債の利払い費が抑制されたことによる[1]．一方，金融危機発生以前の欧米諸国の負債残高の変化は日本とは異なっている．欧米では 1990 年代半ば以降好景気が持続し，これが負債制御の問題を容易にした．米国では，好景気による財政の好転を受けて 2000 年初頭まで対 GDP 比負債残高は大きく減少し, 2001 年には 34%となった．その後はイラク戦争等による戦費の増加はあったものの，好景気を背景に税収が潤沢であったことから負債残高が大きく上昇するには至らなかった．他方，欧州では 2000 年初頭まで対 GDP 比負債残高は大きく減少した．これは，長年にわたる通貨統合の努力が結実し，1999 年にユーロが導入され, 1992 年調印のマーストリヒト条約で通貨統合参加の条件として毎年の財政赤字を対 GDP 比で 3%以内とすることや，明確な景気後退と判断されないときは債務残高を対 GDP 比で 60%以内とすることなどが求められたことで，各国はこれを財政運営の重要な指標として行動していたことによる．この結果，欧州でも対 GDP 比でみた負債残高はギリシャ，イタリアを除くと各国とも純負債残高は低水準にとどまっていた．

しかし，2008 年 のリーマン・ショックを引き金とする金融危機は，世界各国に波及し生産活動は大きく低下，それまでの好景気から一転して深刻な不況に陥った．こうした中，バブル崩壊後の「失われた 10 年」と呼ばれる長期の景気低迷に苦しんだ日本の失敗は繰り返すまいと，各国政府は積極的な財政・金融政策を講じた．金融危機勃発から 5 年が過ぎようとしているが，未だに殆どの国で財政赤字の拡大は深刻な問題である．とりわけ，ギリシャやスペインなど南欧諸国は国債の借り換えが極めて困難な状態となっており，欧州債務危機と呼ばれる状況に至っている．これらの国では，財政赤字幅を対 GDP 比で一定以下に抑えるために財政支出の大幅削減や増税等対策を進めているが，国民の反発は大きく景気低迷と相俟って財政赤字は寧ろ拡大しており，その結果として負債残高は急増するに至っている．政府の負債制御は非常に難しい問題と言える．

---

[1] デフレの害悪が問題となっているが, これに起因する低金利故に国債の残高増加が可能となった. 金融と財政を切り離して考えることには問題が多く, 両者の関連には注意が必要.

なお負債残高としては各国の財政健全度を比較する観点から対GDP比負債残高を用いた．この場合，明確な景気後退時の負債残高の増加効果や好景気時の減少効果を打ち消すため金利調整を行うこともあるが，本分析では金利をGDP成長率で調整することなく，かかる増減効果は純償還額に含めて分析している．なおGDP成長率を直接制御に取り込まない形でこの問題を扱うには，負債残高と併せて名目GDPを状態変数として扱う必要がある．

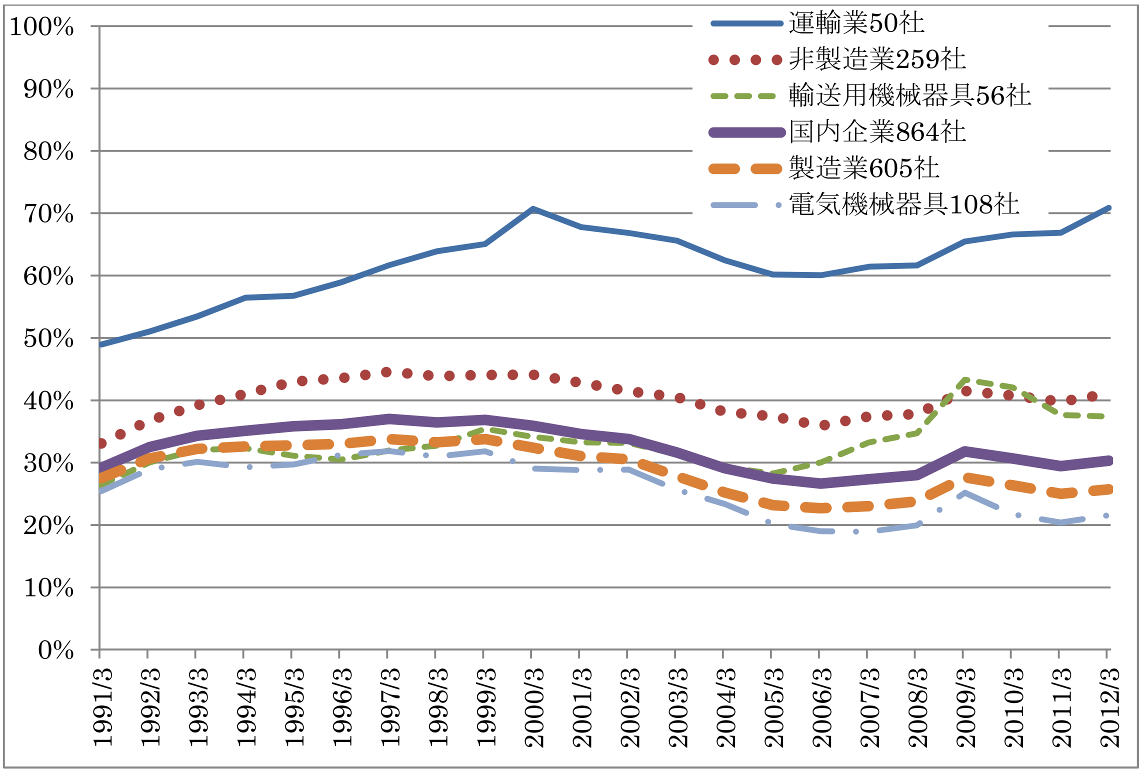


（出所）IMF Economic Outlook No 91 - June 2012 - OECD Annual Projections

図 1 各国政府の対GDP比負債残高

2.2.　国内企業債務の動き

図２は，国内企業の純負債残高の動きである．一般政府の残高の動きとは対照的に，この間，ほとんどの産業において負債残高を増加も減少もさせず，安定的な水準をキープしてきたことがわかる．



※1991 年総資産を 100%とする長短借入金＋社債残高推移の単純平均.

（出所）日本政策投資銀行『財務データバンク 2012 年版』一部・二部上場会社，連結ベース.

図 2 国内企業の負債残高

2.3.　負債残高の動きの分類

次節で示される通り，元本元高と発生金利に対する元利償還額を控除し新規の元本調達額を加算することで次期の負債残高が定まる．ここで元利償還額から元本調達額を控除したネットの償還額を考えると，債務者は償還額を増減させることで負債残高を制御させていると考えることができる．

制御は「ある目的に適合するように対象となっているものに所用の操作を加えること」と定義され，主に次の要素から構成される．

①制御対象：制御の対象となる系で，ここでは負債取引がこれに当たる

②制御装置：検出部，比較部，制御演算部，操作部からなり，操作量を生成する装置のこと．ここでは債務者の負債取引にかかる認識測定，意思決定，契約実行部門がこれに当

たる

③制御目的：ここでは制御過程又は制御結果を債務者が主観的に設定する基準に従って評価し，その評価成績を最も良くすることが目的となる

④操作量(操作変数)：ここでは負債取引で実行されるネットの償還額がこれにあたる

⑤制御量(状態変数)：ここでは負債取引により定まる負債残高がこれにあたる

すなわち債務者の負債残高は，設定した目的に適合するように償還額を操作して定まる制御量となっている．

制御には例えば次のようなタイプのものがある．

(i) フィードバック制御

フィードバックによって負債残高と目標値を比較しその誤差が小さくなるように償還額を生成する制御である．

適切に設計されたフィードバック制御システムにおいては目標値が制御量の均衡値（平衡値ともいう）になる．均衡値とは制御に従う制御量が

$$x_t \to \text{均衡値} \qquad (t \to \infty \text{ のとき})$$

となる水準のことである．一般的には必ずしも目標値が均衡値になるとは限らないし，均衡値が存在しなかったり，複数個存在することもある．

また制御量が直接観測できるとも限らず，その場合は観測可能な量から推定することのになる．例えば雑音を考慮した観測手法としてカルマンフィルタがあるが，本研究では負債残高は直接観測可能であると仮定する．

さらに時間的に変化する目標値に追従させるフィードバック制御システムのことをサーボ系というが，本研究では目標値は固定値と仮定して考察する．

制御装置にこうしたフィードバックループがなく制御量（負債残高）を考慮せずに操作量（償還額）を決定する場合はシーケンス制御と呼ぶ．

(ii) 最適制御

償還額または負債残高を，債務者が定める基準に従って評価し，その評価成績を最も良くするような償還額を生成する制御を最適制御と呼ぶ．基準の評価成績を最も良くするとは，例えば償還額や負債残高を引数とするコスト関数を最小化することをいう．

負債残高の動きを見るとき，単に増加傾向にあるのか減少傾向にあるのかだけでなく，残高が何らかの原因でいったん均衡値から離れたとき，ますます離れていくのか（発散的），あるいは均衡値に戻ろうとするのか（安定的）を見極めることが重要である．このようなシステムの特性を初期値応答特性という．

工学的な制御システムは制御量が均衡値に収束するよう安定性を考慮して設計される．安定的でない制御システムが設計されることはほとんどないであろう．さらに制御量と目

標値の誤差ができるだけ短い時間で十分に小さな許容範囲に収まるようにしたり，制御の過程で発生するオーバーシュートのピークを一定範囲に収まるようにするなどの過渡的応答特性が考慮される．

しかし経済的な意思決定の結果としての負債残高は必ずしも均衡値に向けて安定的に動くよう制御されているとはかぎらない．図１の政府負債の動きを見ると，むしろ発散的な動きが目立つ．図３は負債の初期残高がわずかでも均衡水準から乖離すると，ますます乖離幅が拡大する不安定な制御が行われる場合を模式的に示している．

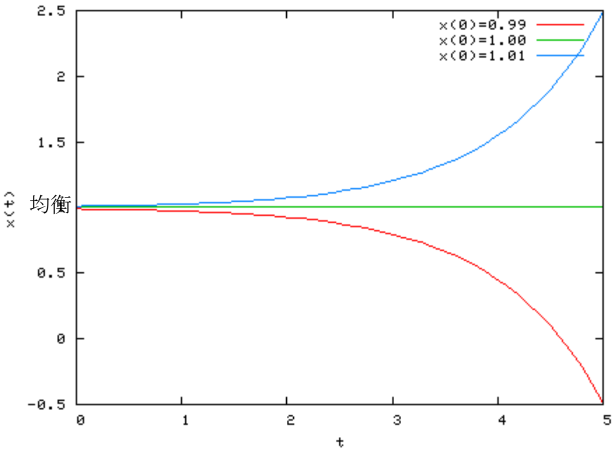


図 ３均衡に対して発散的

制御システムにおいて債務者があらかじめ目標値を定めており，目標値とフィードバックされる負債残高との誤差が時間の経過とともに縮小するような制御を行っているとすれば負債残高の動きはその目標値を均衡値として収束的な動きを見せることになる．図２の企業負債では，長期にわたる均衡収束的な動きが見られる．図４が模式的に表すのは均衡乖離するときオーバーシュートすることなく負債残高が均衡水準に向かうような安定的な制御である[2]．

工学的に設計された制御システムは制御によって制御対象の動学的な特性を改善することを目的としている．しかし負債制御は工学的に設計されたものではない．このため経済的な制御システムは制御によってむしろ不安定性を増幅することがある．最終的に制御不能になる場合もある．経済的な制御システムに内在する問題点をここで述べたような観点から認識して負債制御を考察することは，その有効性を向上させる．

[2] 安定的なフィードバック制御であっても振動により制御量が均衡値を突き抜けてオーバーシュートが発生することがある．制御量の均衡復帰に向けた立ち上がり時間とオーバーシュートの大きさは一般にトレードオフ関係にある．本研究では単純化した動学モデルを扱うことで制御量の振動やオーバーシュートの考察は特に行わない．しかし複雑な経済システムにおいては制御におけるオーバーシュートの考察（迅速な目標達成とそれに伴う反動の大きさのトレードオフ問題）は重要である．

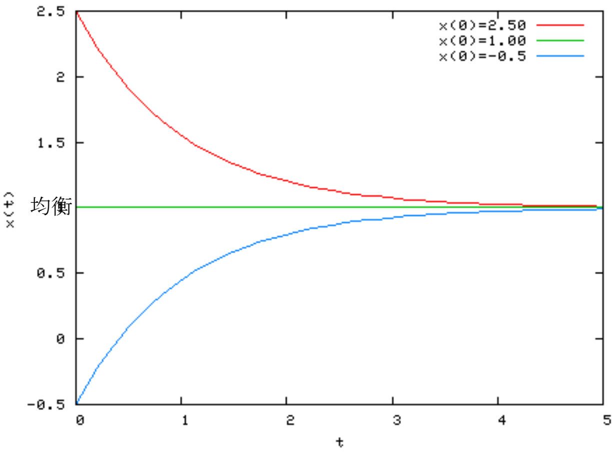


図 4 均衡に対して収束的

しかし，現実の負債残高の制御を決定づけるあらゆる要因を全て考慮に入れて分析することは容易ではない．そこで制御要因を単純化したモデルを用いることで分析を効率的に進めることができるようになる．以下では，負債残高の制御に焦点を絞り込みつつも，様々な負債残高の動きを説明できる理論モデルを構築することとしたい．

もちろん政府と企業ではガバナンスの仕組みも大きく違うし，政府の公的目標と企業の私的目標にも大きな違いはある．しかし，経済主体の個別具体的な問題にとらわれず，負債残高の制御に問題の焦点を絞り込んでモデルを単純化することで，より一般化されたデフォルト問題に効率的に迫ることが可能になる．

3.　負債制御モデルの提示

3.1.　基本モデル

債務者の**主観的**コスト J を

(1) $$J=E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\theta\times\left(x_t-\hat{x}\right)^2+\left(u_t-\hat{u}\right)\right)dt\right]$$

$E[\ ]$：時点 $t=0$ での期待値

δ ：主観的割引率（正値定数）

x_t ：t 期の負債残高（状態変数）　$\hat{x}$ ：望ましい負債残高（定数）

u_t ：t 期の償還額[3]（制御変数）　$\hat{u}$ ：望ましい償還額（定数）

θ ：残高重視係数（非負値定数）

と定義する．

すなわち(1)式は主観的コストを将来コストの割引現在価値の期待値と定義するものである．

この定義式のポイントは次の通りである．

①負債残高は以下で述べる通り確率的ノイズとしての外乱の影響を受けるが，外乱の発生確率（確率測度）は既知として，将来の償還額を定めれば将来コストの現在価値の期待値が計算可能とする．その期待値を主観的コストと定義する．

②将来コストの現在価値を計算するときの割引率は各債務者が主観的に定めることになる．これを**主観的割引率** δ と呼ぶ．近視眼的な債務者ほど主観的割引率は大きくなる．逆に長期的視野に立つほど主観的割引率は小さくなり，将来コストへの影響を考えた行動をとることになる．すなわち経済主体が短期指向的に行動するか長期指向的に行動するか，いずれを選択するかについての決定因子が主観的割引率である．

③ t 期の将来コスト「$\theta\times\left(x_t-\hat{x}\right)^2+\left(u_t-\hat{u}\right)^2$」は，負債残高 x_t と望ましい残高 $\hat{x}$ の間の誤差，償還額 u_t と望ましい償還額 $\hat{u}$ の間の誤差の平方の線形和として定義される．すなわち，それぞれの誤差の平方に比例して将来コストが大きくなることを表している．**残高重視係数** θ は負債残高ギャップが主観的コストに影響する相対的ウエイトを表す非負の係数である．残高重視係数が大きくなるにつれて，残高ギャップは主観的コストに大きく影響しその縮小を一層重視することになる．逆に残高重視係数がゼロになると，残高ギャップは主観的コストに全く影響しなくなり，償還額ギャップの縮小しか考えない制御になる．

[3] ここに「償還額」はネットの元利償還額すなわち「総元利償還額－総元本調達額」のことであり，マイナス値の償還額はネットでみた元本増加額となる．厳密には u_t は瞬間的な償還速度を意味し，十分短い期間 $[t,t+dt]$ における償還額が $u_t\times dt$ となる．

θ の大小は負債制御の結果を大きく左右する．

④残高重視係数 θ，望ましい残高 $\hat{x}$，望ましい償還額 $\hat{u}$，主観的割引率 δ の 4 つのパラメータは, 負債制御を行う前にこのモデルの枠外で債務者が主観的に決定するものである[4]. そしてこれらが個々の債務者の負債制御ポリシーの属性を定めることになる．

次に償還額と負債残高の動学的な関係式

⑵ $$dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

r ：平均支払金利（非負定数）

σ ：外乱の標準偏差（非負定数）

W_t ：フィルター付き確率空間 $(\Omega, F, P; F_t)$ 上で定義された 1 次元 F_t-標準ブラウン運動

を定める．

これは十分小さい期間 dt においては，償還額 u_t と外乱 $\sigma \times dW_t$ が定まれば負債残高の増分 $x_{t+dt} - x_t$ が従属的に定まる関係を表す．このような制御（償還額）と外乱が将来の状態（負債残高）を定める方程式を**状態方程式**という．状態方程式の制約により，債務者は償還額 u_t と従属して定まる将来の負債残高 x_{t+dt} をそれぞれ独立して望ましい水準に選ぶことができなくなる．

最後に，債務者は各時点で観察される外乱を前提に状態方程式の下で主観的コストを最小にするよう償還額を選ぶものと仮定する．すなわちフィルター付き確率空間，ブラウン運動，償還額の組からなる許容制御 $\gamma = (\Omega, F, (F_t), P, W_t, u_t)$ から J を最小にするものを選ぶのである．以下では，主観的コストを最小にする償還額 u_t を単に**最適制御**という．

[4] 冒頭に述べたボトム・アップ・アプローチの観点から本モデルではこれらのパラメータがどのような内部的な最適化構造を持つかについて立ち入らない．しかしこのことはそれらを統合した一般モデルの構築を否定しているわけではない．主観的パラメータを制御系の外生変数として統計的手法などにより制御系の入出力データから直接カリブレーションするのではなく，異時点間の債務者の効用関数，生産関数等からなる主観的パラメータを内生化した系を仮定してそれを個別推計するアプローチもありうる．しかし本研究ではそれよりもむしろ，与えられたパラメータによって制御結果が如何なるものになるか，そして負債残高制御の有効性を高める改善可能性の検討に主眼を置く．

なお注意すべきは，最適制御は事前に債務者が決定した主観パラメータの最適性までは意味しない点である．あくまで４つの主観パラメータが外生的に与えられたときの限定的な最適性を意味するにすぎない．

以上の基本モデルのセットアップを整理すれば次の通りである．

$$\inf_{\{u_t\}} : J = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\theta \times (x_t - \hat{x})^2 + (u_t - \hat{u})\right)dt\right]$$

$$\text{s.t.} \;\; dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

この基本モデルに基づく最適制御解について，まず残高重視係数ゼロの場合の解を求め，次に係数が正値をとる場合の解を求めることにしよう．

(i) 残高重視係数ゼロ $\theta = 0$ の場合

問題は

$$\inf_{\{u_t\}} : J = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}(u_t - \hat{u})dt\right]$$

$$\text{s.t.} \;\; dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

となる．主観的コストに x_t を含まないことから残高 x_t と望ましい残高 $\hat{x}$ とのギャップは主観的コストに影響を与えず，状態方程式は制約条件としてバインディングでない．明らかに J は

$$u_t \equiv \hat{u}$$

のとき最小値ゼロをとるからこれが最適制御となる．最適制御は $\hat{u}$ の水準にのみ依存して決定される．負債残高の実績値はフィードバックされることはなく，負債制御はシーケンス制御となる．

このような最適シーケンス制御に従うときの将来の負債残高の期待値を求める．$u_t \equiv \hat{u}$ を状態方程式(2)に代入すれば

$$dx_t = (r \times x_t - \hat{u})dt + \sigma \times dW_t$$

を得る．これは加法ノイズを持つ線形確率微分方程式であり，初期値 x_0 の下で解は

$$x_t = \left(x_0 - \frac{\hat{u}}{r}\right)e^{rt} + \frac{\hat{u}}{r} + \sigma\int_0^t e^{r(t-s)}dW_s$$

となる．両辺期待値をとれば右辺第２項は伊藤積分（すなわち期待値は零値）であるから

$$E[x_t]=\left(x_0-\frac{\hat{u}}{r}\right)e^{rt}+\frac{\hat{u}}{r}$$

を得る．なお，期待値をとるとき将来の残高の動きは$\sigma=0$の場合と一致するが，将来残高の予測誤差$\sigma\int_0^t e^{r(t-s)}dW_s$は時間の経過と共に累積していくことに注意が必要である．期待値はあくまで期待値でしかなく，時間の経過とともに外乱が加わると，実際の残高は当初の期待値から大きく乖離する可能性がある．

このとき利払いと望ましい償還額が均衡する**償還額均衡**$\hat{u}/r$に負債残高が一致していない限り，わずかでも残高の初期値が償還額均衡を上回れば残高の期待値は発散的に増加し，下回れば発散的に減少することを表す（図３の「均衡」が償還額均衡に相当する）．

（ii）残高重視係数プラスの場合

これは残高ギャップと償還額ギャップの双方が主観的コストに影響する場合である．問題は

$$\inf_{\{u_t\}}:J=E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\theta\times(x_t-\hat{x})^2+(u_t-\hat{u})\right)dt\right]$$

$$\text{s.t. }\ dx_t=(r\times x_t-u_t)dt+\sigma\times dW_t$$

但し $\theta>0$

と定式化される．

この Linear Quadratic Tracking Gaussian 問題と呼ばれる最適制御問題を解くと最適制御は次の通りとなる（数学付録）．

$$u_t=\hat{u}+\{(r+\lambda)x_t-(\lambda\kappa+\hat{u})\}$$

但し $\kappa=\dfrac{\hat{u}(r-\delta)+\theta\hat{x}}{(\lambda+\delta)\lambda}$

$$\lambda=\frac{-\delta+\sqrt{(\delta-2r)^2+4\theta}}{2}$$

となる．ここで，κとλは残高重視均衡と残高調整速度を表す．これを状態方程式に代入すれば

$$dx_t=-\lambda(x_t-\kappa)dt+\sigma\times dW_t$$

となる．これも上と同じ加法ノイズを持つ線形確率微分方程式であり，解は

$$x_t=(x_0-\kappa)e^{-\lambda t}+\kappa+\sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$$

となる．両辺期待値をとれば

$$E[x_t] = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa$$

を得る．

このとき κ は利払いと最適償還額が均衡する**残高重視均衡**となっている．利払いと最適償還額が均衡しているため，残高重視均衡に到達すると負債残高は維持される．何らかのショックでいったん残高重視均衡から離れたとき，負債残高には定率 λ の速度でその乖離を縮小（$\lambda > 0$ のとき）または拡大（$\lambda < 0$ のとき）させる力が働く．この定率速度 λ を**残高調整速度**と呼ぶ．

残高重視均衡に対して負債残高の期待値が収束的に動くのか発散的に動くのかは，残高調整速度の正負によって定まる．

もし残高調整速度が正値であれば負債残高の期待値は残高重視均衡に収束する．（図４の「均衡」部分が残高重視均衡に相当する）．

逆に残高調整速度が負値であれば均衡とのギャップが拡大することになるため，負債残高の期待値の動きが一転して発散的になる（図３の「均衡」部分が残高重視均衡に相当する）．

なお $\theta = 0$ の場合と同様，実現していく負債残高と期待値との予測誤差 $\sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s$ は時間の経過と共に累積していくが，もし残高調整速度 λ が正値であれば t を大きくとるとき限界的な外乱の影響は指数的に小さくなるが，逆に残高調整速度が負値であれば限界的な外乱の影響は指数的に大きくなる．

残高調整速度 λ の正負は次の関係式によって定まる．

(i) $\delta < r + \dfrac{\theta}{r}$ ならば $\lambda > 0$ となり負債残高の期待値の動きは均衡収束的である

これは主観的割引率が利子率 r や残高重視係数を利子率で割り戻したもの $\dfrac{\theta}{r}$ に比較して十分小さい状況，すなわち債務者が比較的長期指向的である場合は負債残高の期待値の動きは均衡収束的になることを意味する．

(ii) $\delta > r + \dfrac{\theta}{r}$ ならば $\lambda < 0$ となり負債残高の期待値の動きは発散的である

これは逆に主観的割引率が r や $\dfrac{\theta}{r}$ に比較して十分大きい状況，すなわち債務者が極端な短期指向性が強い場合は負債残高の期待値の動きは発散的になることを意味する．

一方，κ の水準についてはおおよそ次のことが分かる．

① $\delta \to \infty$ のとき $\kappa \to \dfrac{\hat{u}}{r}$，$\lambda \to -r$

このことは，$\theta > 0$ であっても，δ が大きく短期指向の場合，残高重視均衡は償還額均衡に近づくことを意味する．またこのとき $\delta > r + \dfrac{\theta}{r}$ すなわち $\lambda < 0$ が成立するから，負債残高の期待値の動きは発散的となる．これは残高重視係数をゼロにする場合の制御に近づくことを意味する．

フロー変数である償還額と異なり残高はストック変数であり，いったん負債が増加して財政状態が悪化すると，将来の期間に影響する．すなわち，残高重視係数をゼロにするということは将来の期間に影響する財政悪化を無視するという意味で極端な短期指向の制御ポリシーといえる．

② $\delta \to 0$ かつ $\theta \to 0$ のとき $\kappa \to \dfrac{\hat{u}}{r}$，$\lambda \to -r$

このことは，δ が小さく長期指向であっても，残高重視係数が十分に小さい場合も①の場合と同様残高重視係数をゼロにする場合の制御に近づくことを意味する．

③ $\delta \to 0$ かつ $\theta \to \infty$ のとき $\kappa \to \hat{x}$，$\lambda \to \infty$

このことは δ が小さく長期指向かつ残高重視係数が十分に大きい場合，残高重視均衡は望ましい負債残高に素早く近づくことを意味する．

以上，均衡に対して負債残高の期待値の均衡に対する安定条件を整理したものが表 1 である．

表 1 均衡に対する負債残高の動き

ケース	条　件			残高の動き
1	(i) 残高重視係数 θ ゼロ	残高＞償還額均衡		発散的に増加
2		残高＜償還額均衡		発散的に減少
3	(ii) 残高重視係数 θ プラス	残高調整速度 λ プラス		残高重視均衡 κ に収束
4		残高調整速度 λ マイナス	残高＞残高重視均衡 κ	発散的に増加
5			残高＜残高重視均衡 κ	発散的に減少

3.2.　拡張モデル

基本モデルでは，残高や償還額が取り得る範囲に制約を課さなかったが[5]，現実には負債残高や償還額には上限がある．

①負債残高に「**残高上限** $x_{\max}$」が存在する

$$x_t \le x_{\max}$$

②償還額に「**償還額上限** $u_{\max}$」が存在する

$$u_t \le u_{\max}$$

と表される．際限なく負債残高を膨張させることが出来る経済主体は存在しないし，償還財源に上限がない経済主体も存在しないのは自明であろう．

拡張モデルは，基本モデルにこの２つの許容条件を追加したものである．

もし負債残高が残高上限となり，その時点で利払い額が償還額上限を上回ったら債務者は両方の条件を満たす許容領域で制御を見いだすことはできなくなる．このような制御不能の状態に陥ることをデフォルトと定義する[6]．残高上限同様，償還額上限の存在は負債制御を考える上で重要な制約条件となっている．

ここで重要な注意点は債務者はこの２つの許容条件が存在することを認識していたとしても，将来時点におけるその水準を完全に予見できないという現実的な制約があることである．この点は次節以降で詳しく考察するが，このため債務者は基本モデル同様に許容条件を完全に予見できないまま負債制御を行うが，制御量や操作量にかかる許容条件がバインディングになって（あるいはそこに接近して）初めて許容条件が明らかになるのである．

---

[5] 数学的には操作量 u_t は主観的コスト J が有限の値になるよう

u_t は閉区間 U で値をとる F_t 発展的可測過程であって

$$\forall q \ge 1, \exists M > 0 \text{ s.t. } E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left|u_t\right|^{2q} dt\right] \le M$$

とする許容条件が課せられる（長井 p.130 参照）．しかし現実には負債残高が発散するケースではかかる制約条件は満たされていない．すなわち負債残高が発散するケースの制御は数学的に最低限必要な許容制御の条件すら満たしていない代物なのである．

[6] デフォルトを延滞または金融支援を目的とした重要な条件変更と定義する場合, それは債権者からみた定義である．一方，本章ではデフォルトを債務者が延滞または条件変更を受けざるを得ない制御不能な状態に陥ることとしており，いわば債務者の状態からみた定義となっている．なお債務者の財政状態の著しい悪化（例えば債務超過）をもってデフォルトと定義することもある．本研究ではかかる財政状態となっても元利払いが可能な限りはデフォルト発生とはしないが，期限到来毎の借換が認められずに負債上限が期限未到来残高まで引き下げられるため早晩デフォルト発生が懸念される状態であることに違いはない．

3.2.1. 残高上限の検討

まず，負債残高が残高上限まで増加することになる条件を確認しよう．

表１のケース１の場合，すなわち

$\theta = 0$ かつ $x_0 > \dfrac{\hat{u}}{r}$

のとき負債残高の期待値は発散的に増加する．このときは制御ポリシーを改めない限り必ずどこかで残高上限に到達する．

表１のケース４の場合，すなわち

$\theta > 0$ かつ $\lambda < 0$

のときも同様に負債残高は発散的に増加し，残高上限に到達する．

短期指向の制御ポリシーは負債制御を不安定なものとし，残高が均衡を上回るとき動きは発散的増加となり，ポリシーを変えない限り必ず残高上限に到達してしまう．

但し，表１のケース３の均衡安定的な場合でも，残高重視均衡 κ が残高上限よりも高い水準にあるときは残高上限に到達しデフォルトすることになる．先に述べた通り，残高重視均衡 κ は概ね望ましい残高 $\hat{x}$ と償還額均衡 $\hat{u}/r$ の間の水準にある．すなわち，望ましい残高や償還額均衡が残高上限を上回るとき，負債残高は残高上限を超えた均衡に向かって増加を続けることになる．

もし，債務者が残高上限の存在を認識し正確に測定していれば，残高重視係数 θ をゼロにしたり，あるいは望ましい残高を残高上限を超える水準に設定した制御を選択することはないであろう．上限を超えた残高を望ましいと考えることは，主観の問題とはいえ合理的でない．債務者が許容条件を認識・測定しつつ，一方で残高重視係数をゼロにしたり望ましい残高を上限を超えた水準とするような許容可能な最適制御を求める問題としてモデルをセットアップすることは可能ではあるが，合理的でも現実的でもない．

しかし，債務者にとって残高上限の予見は非常に困難になる状況が現に存在する．

(i) 次節で論じる通り，将来の残高上限は将来の償還能力とセットで定まる．しかし，償還能力を見積もるうえでの不確実性は大きく，また必ずしも合理的な見積もりが実現されるとは限らないことから，将来の償還能力の予測は一般に容易ではない．

(ii) 制度的な総量規制などがある場合を除けば，債権者が早い段階から債務者に対して残高上限を通告するケースはほとんどない．

(iii) 複数の債権者から与信を受けている状況においては，個々の債権者の残高上限の合計が必ずしも債務者にとっての残高上限になるとは限らない．特に国債や社債発行などよによる市場調達の場合は，市場の見方は常に変動するため，市場の総意としての残高上限の予想は困難である．

(iv) 金融環境の変化により，銀行ないし市場の資金供給能力も変化する．その結果，個々の残高上限も引き下がることがある．

（v）外乱により残高上限に到達する可能性もある．

基本モデルの(2)式は「残高増分＝発生利息－償還額＋外乱」という関係を示していた．すなわち，残高は外乱によっても変動するため，外乱の分散が大きいほど，意図せず負債が残高上限に到達することがある．

負債残高が残高上限に近ければ近いほど，また外乱の分散が大きければ大きいほど，負債残高が残高上限に到達する確率は高くなる．

しかし，残高が残高上限に近づくほどに負債残高制御は厳格に行われることになり，残高の動きの分散は小さくなる．したがって，現実的には外乱による上限到達問題よりも（i）～（iv）の問題を検討することが先であろう．

3.2.2. 償還額上限の検討

もし，負債残高が残高上限に到達したとしても，上限残高に対する利払いが可能であれば，残高維持は可能であり，即座にデフォルトに至ることはない．すなわち**償還能力不等式**

(3)　　残高上限時の利払い額≦償還額上限

が成立することが，デフォルト回避の条件である．この償還能力不等式こそ，残高上限と償還額上限をつなぐ重要な関係である．債権者は残高上限を定めるとき償還能力不等式の成立を確認することは必須である．

ところで償還能力不等式の成立を必須として残高上限は定められる必要があるにも関わらず，現実問題として次の事由から償還能力にかかる許容条件を正確に予見できないことから，結果的にこの不等式が成立しなくなりデフォルトが発生することがある．

（i）まず残高が上限に到達したときの償還額上限の予測は容易ではないことが最大の原因である．特に，金融分野においては債務者と債権者の間に情報の非対称性があり，債権者はすべての情報にアクセスできる状況にない．仮に重要な情報にすべてアクセス可能としても，それら情報を用いて簡単に正確な将来予測ができるようなことはほとんどない．

（ii）その結果，当初予測しなかった債務者の償還能力の低下に見舞われると，残高上限も引き下げられる．現時点の残高の利払い能力がないとなれば，債務上限は現在残高に近いところまで引き下げられ，早晩，リファイナンス時に償還能力不等式が成立しなくなり，デフォルトに至る．リーマンの破綻に見られるとおり次の(iii)と併せて，これはしばしば観察される問題である．

（iii）債務者の償還能力の低下により債務上限が引き下げられるようなときは，同時に調達金利も急上昇するため，償還能力不等式左辺の利払い額が急増し，結果として不等式が成立しなくなることがある．しかし，残高上限に近いところでの調達金利の正確な予測は不可能に近い．

3.2.3. デフォルトの回避可能性

以上の検討を踏まえて，許容条件が完全予見できない中でデフォルトの発生をゼロにすることはできない．しかしデフォルトの回避可能性を高める工夫は可能である．

まず残高上限にできるだけ到達しないような制御ポリシーの設定が求められる．

(i) 残高重視係数 θ ゼロの場合は，望ましい残高の重視の制御ポリシーに転換する必要がある．債務者が残高重視係数をゼロとするのは，現在の負債残高と残高上限には相当の距離があり残高を重視した制御を行う必要がほとんどないと考えているからである．しかし，残高上限のない負債は現実的にはない．

(ii) 残高重視係数 θ がプラスであったとしても，主観的割引率 δ が極端に大きい近視眼の場合は，将来の残高ギャップについて無視するに等しい．このようなときは主観的割引率を抑えて長期指向に転換することが必要となる．しかし，これを実行することは容易ではない．一般政府の負債制御ポリシーの転換は歳出カットや増税負担など国民的理解が必要になる．企業の場合も，長期指向経営に対するインセンティブなどの制度設計変更が必要となる．

(iii) 仮に負債残高の動きが収束的で均衡が残高上限を下回っていても，外乱により残高が意図せず上限に到達することがある．外乱は時間的に蓄積していくため，長期間にわたるデフォルト発生のリスクを考えるときは小さな外乱でも無視できなくなる．外乱の特性が与えられればその到達確率などを精密に計算することはできる．ところが実際は大きな外乱の再現性は乏しく，その特性はほとんど知られていない．確率解析に振り回されるより，単純に上限を低く見積もって制御したうえで，次に示すとおり仮に残高上限に到達してもデフォルトにならない備えをするほうが現実的である，

残高上限に到達したときでも償還能力不等式が成立すればデフォルトには至らない．すなわち償還能力不等式が成立するようにあらかじめ残高上限をかなり低く設定しておけばよい．上で指摘したデフォルトの発生プロセスは償還能力の見積もりが正確でないため，このため将来の償還額上限の正確な見積もりが必要になる．

(i) 償還額上限を正確に見積もるためには，財務にかかる正確なデータが前提となる．

企業の場合は制度的に信頼性が保証された財務会計データが基本になる．このため経済環境の変化に対応し会計制度の不断の見直しも重要である．近時はこれに加えて，非財務情報を一体でディスクローズする統合報告書などの動きも注目されている．

政府の場合は財政統計データの信頼性確保が不可欠である．ギリシャ債務危機は，財政統計の不正が発端であった．

(ii) データ分析能力の向上が重要であることは言うまでもない．

4.　負債制御ポリシーの推計

前節では，残高重視係数，望ましい負債残高，望ましい償還額，主観的割引率という４つのパラメータのセットが負債制御ポリシーの主要な属性値であることを明らかにした．

しかし，これらはモデル内部の主観的パラメータであって，経済データとして直接的に観察はできない．本研究の第３のテーマは債務者の負債制御ポリシーの定量計測，すなわち主観パラメータの推計である．これにより各債務者の負債制御ポリシーの定量比較が可能となる．

具体的には，負債の実績残高と最適制御残高の動きをグラフにプロットし，２つのグラフの各期のギャップの平方和が最小となるよう，主観的パラメータの値を少しずつ調整しながら数値計算を繰り返して探し求めるのである．一般にモデルによる理論的な出力値と現実の経済データの観測値の適合が最もよくなるようパラメータの値を探索・調整して定める手法をカリブレーションと呼ぶ．

4.1.　政府債務の制御ポリシー

以下のグラフは，対名目ＧＤＰ比純負債の実績残高と最適制御を行ったとしたときの理論残高の動きをグラフにプロットしたものである[7]．1990 年のバブル崩壊以降，深刻な景気低迷を経験した日本では，名目 GDP の伸びが抑えられる一方，財政難を反映して国債残高の増加が顕著で，両者の相乗効果としてこの比率の増加は顕著である．このため，発散的制御の傾向が強い．他方，欧米諸国は，2008 年の金融危機まで長期にわたり好景気が持続した．その結果，名目 GDP が順調に増加し，財政状態は比較的良好で国債残高の増加は抑えられた．従って，金融危機以前は，収束的な制御として観察される．しかしながら，それ以降は日本と同様の困難な状況に陥いることとなった．カリブレーションの結果は，こうした全般的な動きに各国の個別事情を反映したものである．

また，各国の対 GDP 比負債残高と推計されたパラメータを対比して見ると，スペインに見られるとおり，残高重視に見えても，実際はバブル的状況によって生み出されたものである場合もある．このように，推計結果の評価は各国の経済事情を踏まえて行う必要がある．

[7] 以下，政府債務にかかる残高や償還額の単位は GDP に対するパーセント表示である．

4.1.1.　日本政府

図５は日本政府の対ＧＤＰ比純負債の実績残高と最適制御を行ったとしたときの理論残高の動きをグラフにプロットしたものである．主観パラメータを推計すると，残高重視係数ゼロであり望ましい償還額が-4，償還額均衡は-378 と著しい低く，強い発散的な傾向がみられる．2004-07 年は欧米の好景気を受けて日本経済も持ち直した時期であるが，この短い期間を除けば，税収が伸び悩む一方で，高齢化の進展を受けた社会保障費の著増により歳入欠陥は一向に改善されず，低金利故に利払い負担が軽かったこともあり，国債残高は膨れ上がる一方となった．過去 20 年にわたる財政健全化の先送りは最早限界に達しつつあることから，償還を進めるための増税や歳出削減が行われなければならない．

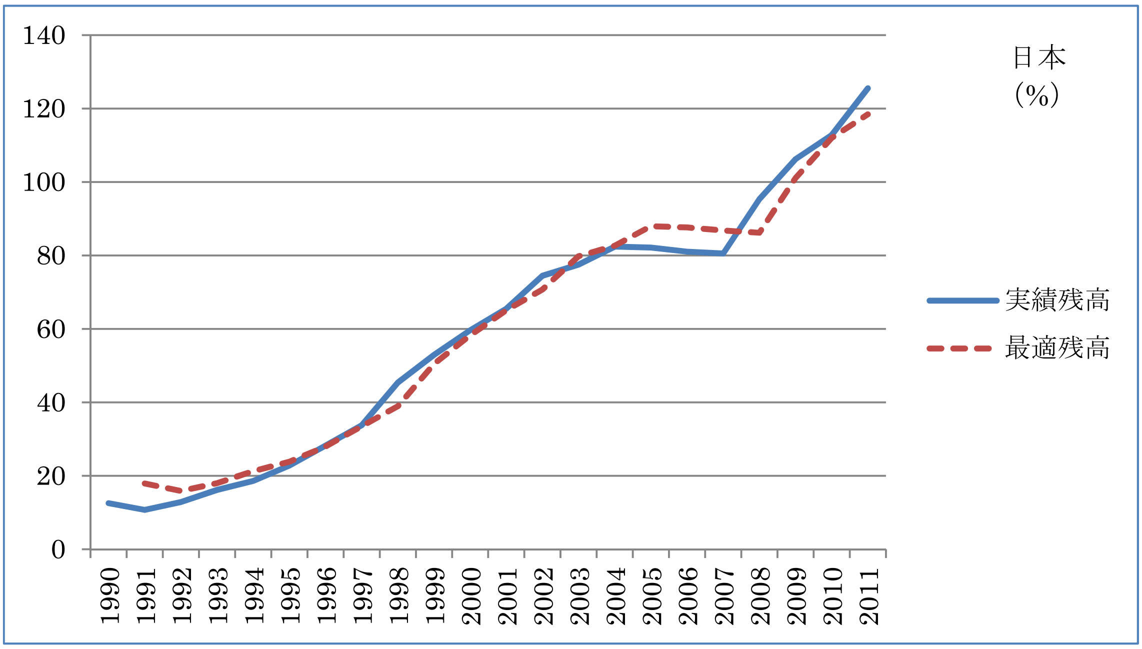


図 5 日本政府の負債残高（残高重視係数=0，望ましい償還額=-4.3，償還額均衡=-378.7）

4.1.2.　アメリカ政府

図 6 はアメリカ政府の負債残高の動きである．残高重視係数ゼロ，望ましい償還額 1.2，償還額均衡は 38.4 と低く，発散的である．クリントン政権下の米国経済の復調を受けて 90 年代半ば以降負債残高は発散的に減少した．その後は，IT バブル崩壊やイラク戦争等により負債残高は増加に転じたが，好調な経済が歯止めとして機能した．しかしながら，住宅バブルの崩壊とそれに起因する金融危機により，GDP の伸びは止まる一方，急激な財政状態の悪化が進行している．この結果，残高は発散的傾向を強めている．

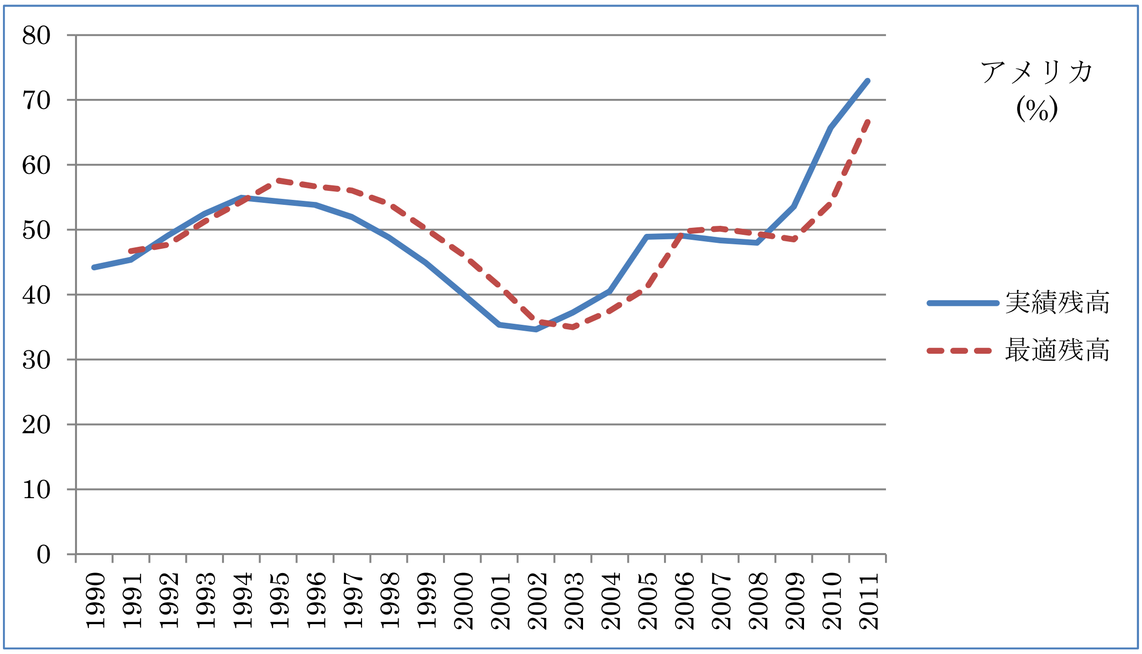


図 6 アメリカ政府の負債残高（残高重視係数=0，望ましい償還額=1.2，償還額均衡=38.4）

4.1.3.　ドイツ政府

図 7 はドイツ政府の負債残高の動きである．残高重視係数は 0.01 のプラスとなっており，日米と異なり望ましい残高 32 を考慮にいれた制御が行われている．そこで残高重視均衡の動きをグラフに追加している．この均衡残高と実績残高とのギャップを残高調整速度 10%の年率で縮小させる制御が行われる形になっており，残高の動きは収束的となっている．ドイツでは財政均衡目標の達成が憲法で定められるなど元々健全財政指向が強いが，1990年の東西統一によるコストは非常に大きく財政状態は緩慢ながら悪化が進んだ．しかし，その中で構造改革に努めた結果，2000 年代半ばには負債残高の増加に歯止めが掛かった．2008 年の金融危機以降は財政悪化はあるものの，比較的好調な経済が発散を抑制している．

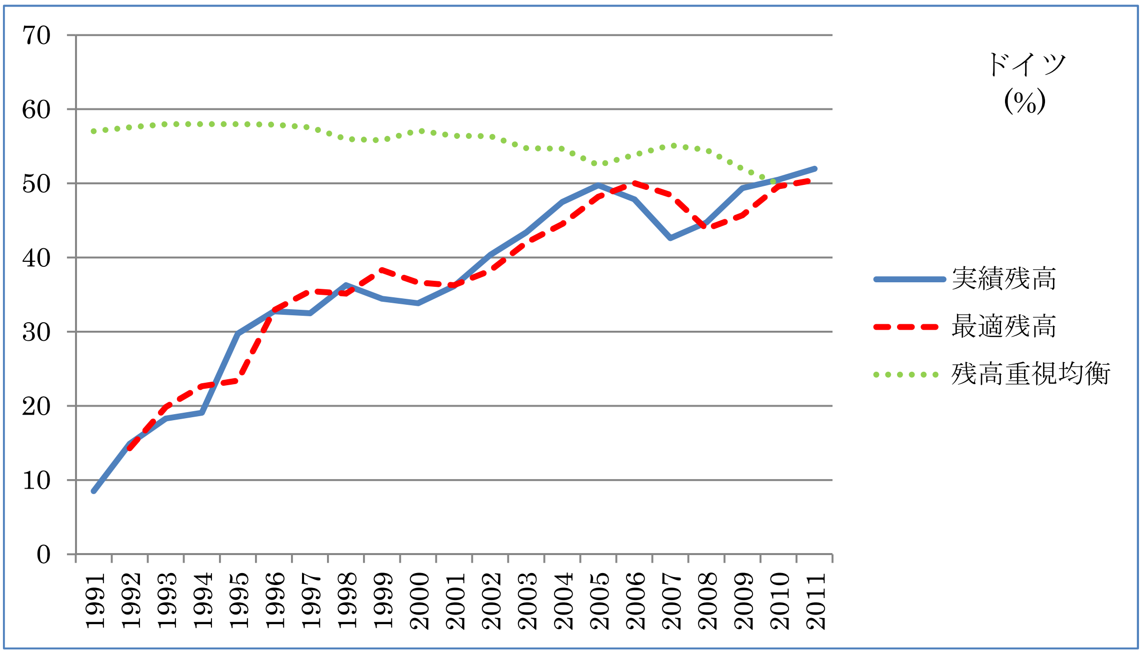


図 7 ドイツ政府の負債残高（残高重視係数=0.01，望ましい残高=32.4，望ましい償還額=7.5，主観的割引率=0，残高調整速度=0.10）

4.1.4.　イギリス政府

図８はイギリス政府の負債残高の動きである．残高重視係数はゼロであり，負債残高の動きは発散的である．イギリスの推移は米国のそれとよく似たものとなっている．イギリスの負債残高も 90 年代後半以降経済の復調が進み，増加に歯止めが掛かった結果，金融危機までは対 GDP 比は 30%を切る水準にあった．しかし，金融危機による金融業を中心とする産業への打撃は大きく，経済成長の鈍化とそれに伴う財政状態の急激な悪化のテンポは米国を凌ぐものとなっている．この結果，負債残高の均衡収束の動きは見えない．

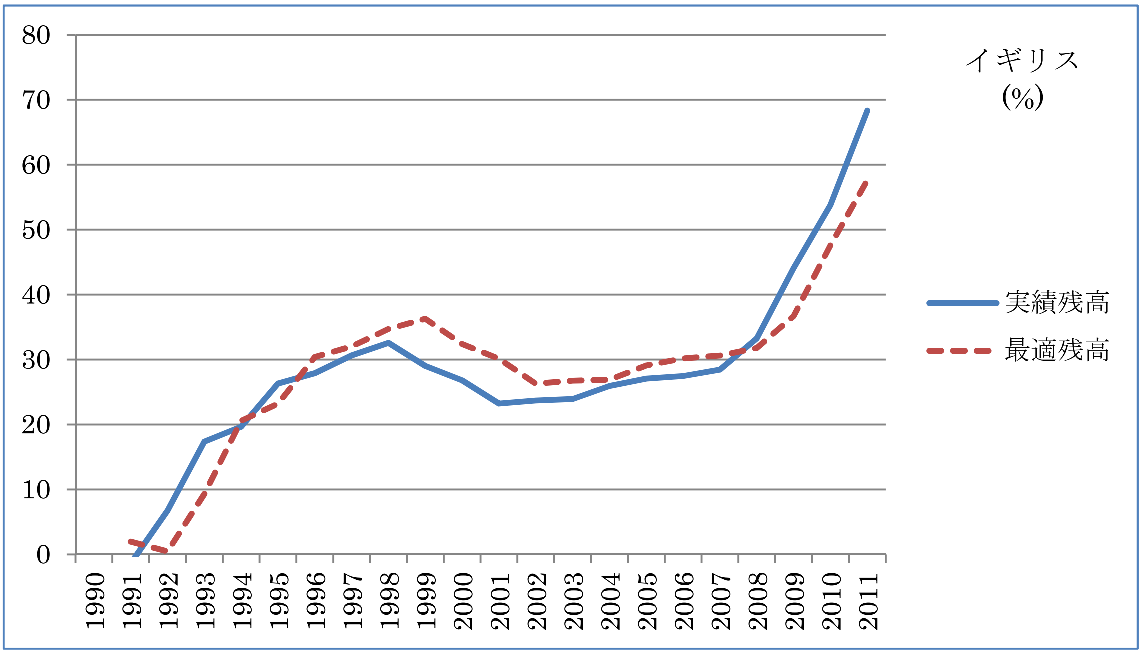


図 8　イギリス政府の負債残高 (残高重視係数=0, 望ましい償還額=-1.8, 償還額均衡=-52.3)

4.1.5.　フランス政府

図 9 はフランス政府の負債残高の動きである．残高重視係数はゼロであり，負債残高の動きは発散的となっているが，望ましい償還額もまたほぼゼロに近く，発散的な傾向はここまでみてきた日米英に比較すると強くはない．フランスは社会福祉財政負担が重く赤字財政が長く継続しているが，負債残高の推移はイギリスと比較的に似通っている．推計結果が発散を示しているのは，他国同様，金融危機の影響である．

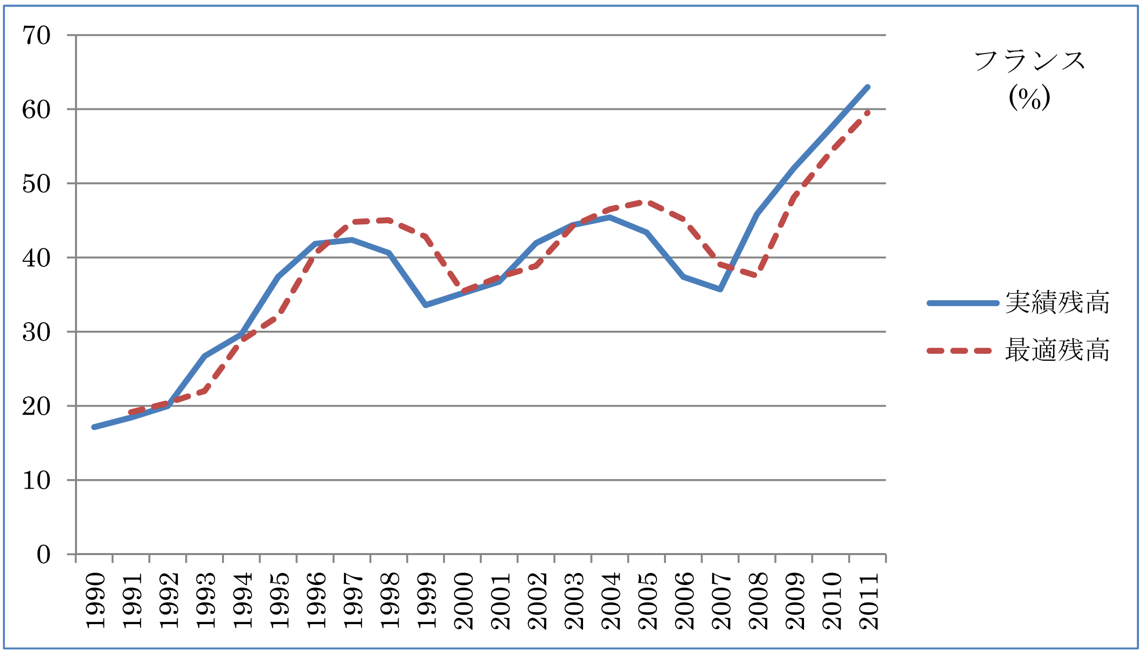


図 9　フランス政府の負債残高（残高重視係数=0, 望ましい償還額=-0.3, 償還額均衡=-9.3）

4.1.6.　イタリア政府

図 10 はイタリア政府の負債残高の動きである．ドイツ政府と同様，残高重視係数は 6.0 のプラスであり，残高重視均衡は 91%と高水準ながら概ね安定しており，対 GDP 比残高は収束的である．リーマン・ショック後一時的に残高は増加したが，著しい発散が見られるわけでもない．イタリア国債の名目残高はドイツに次ぐ大きさとなっており，EU の財政安定化・成長協定の基準を上回っている．しかしながら，基礎的財政収支は辛うじて黒字を保つなど，それなりの健全性維持の努力がなされてきた．残高上限に負債残高が近づいていることを強く意識してきた結果として，高い残高重視係数の値となってきたと考えられる．

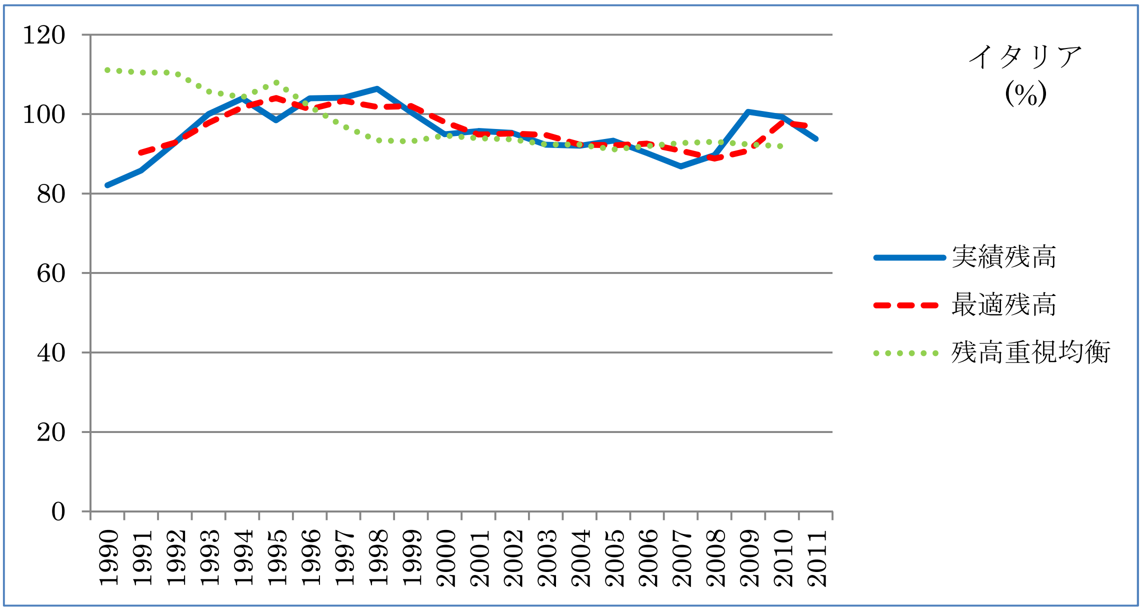


図 10 イタリア政府の負債残高（残高重視係数=6.0，望ましい残高=-347.8，望ましい償還額=-202.8，主観的割引率=12.9，残高調整速度=0.42）

4.1.7.　スペイン政府

図 11 はスペイン政府の負債残高の動きである．残高重視係数は 1.1 と高い．しかし，スペインの場合は期間的に分割して注意深く観察する必要がある．スペインでは不動産・建設を中心に内需主導のバブル的な経済成長が 90 年代後半から 2007 年頃まで続いた結果，対 GDP 比で見た政府純負債が見かけ上大きく減少しており，このために残高重視の制御ポリシーが推計されている．しかし，これを以て残高重視と見做すのは適当とは言い難い．不動産バブル崩壊による経済への打撃は極めて深刻であり，金融システム崩壊や高い失業問題は財政状態の急激な悪化を招いている．その結果，負債残高は発散的増加に転じている．

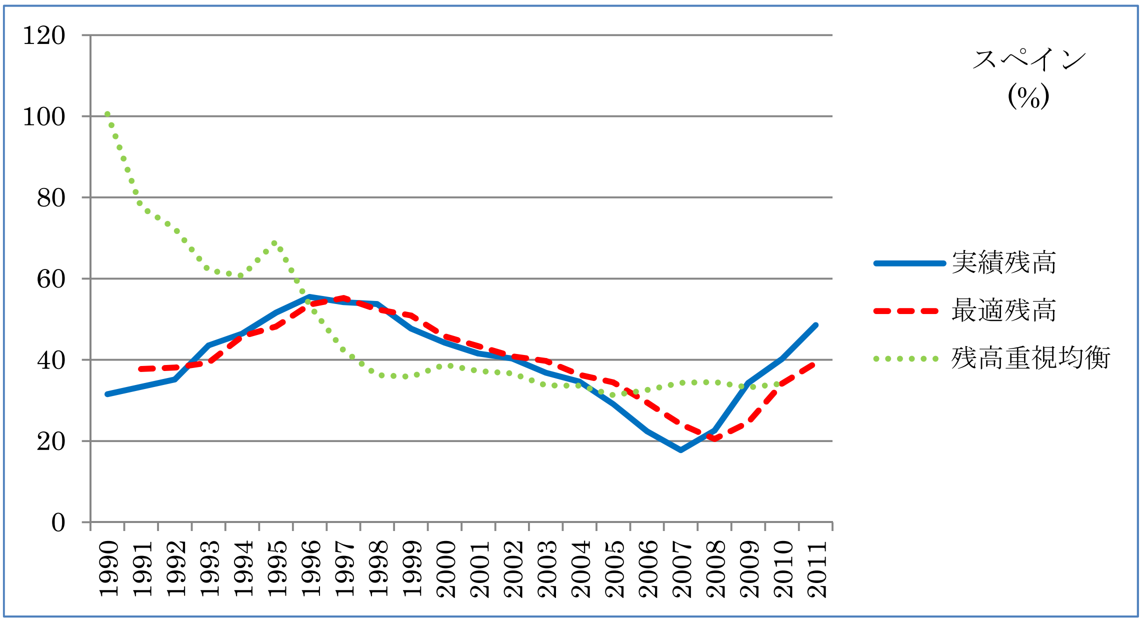


図 11 スペイン政府の負債残高（残高重視係数=1.1，望ましい残高=723.0，望ましい償還額=160.2，主観的割引率=4.8，残高調整速度=0.18）

4.1.8.　ギリシャ政府

図 12 はギリシャ政府の負債残高の動きである．残高重視係数はゼロであり，負債残高の動きは発散的である．2009 年政権交代を経て翌年，財政統計の不備を欧州委員会に指摘され，財政問題が表面化．一時期はハードデフォルトの可能性も高まったが，2012 年 2 月に IMF，EU 等による支援が決定された．支援のための条件として増税，緊縮財政，公益事業民営化等が実施されているが，経済の収縮が続いており財政状態改善への歩みが進んでいるとは言い難い．

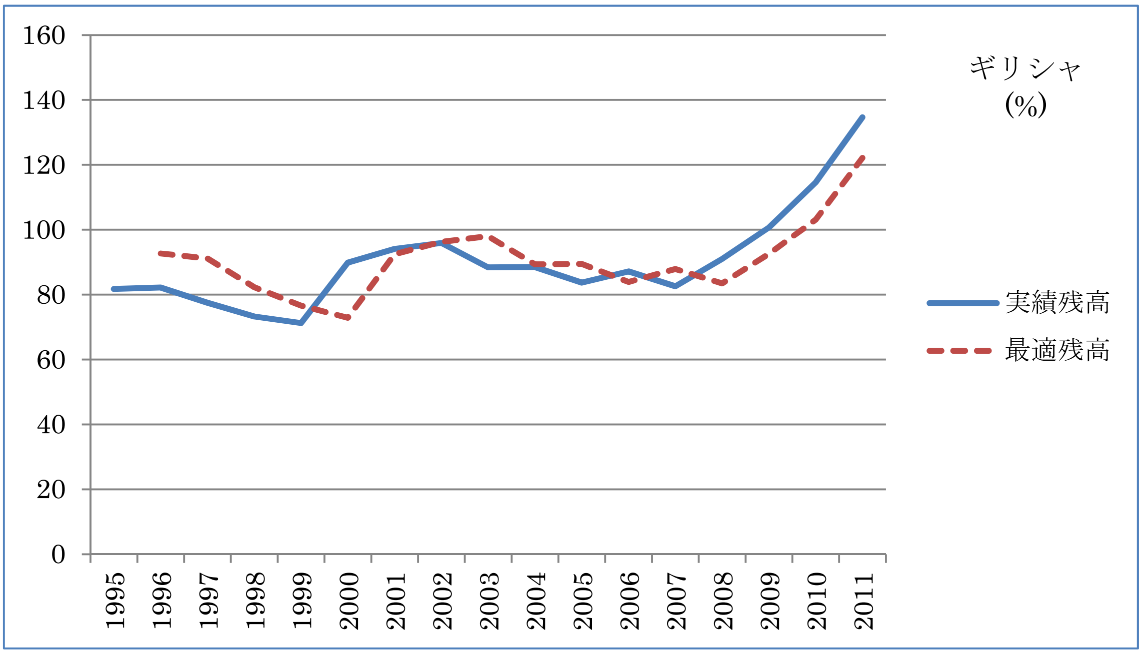


図 12　ギリシャ政府の負債残高（残高重視係数=0, 望ましい償還額=2.8, 償還額均衡=31.7）

4.2. 国内企業

国内企業（一部，二部上場（除く金融業）864 社．連結ベース．1991-2011 年を通じて存続企業[8]）について各社ごとにカリブレーションを実行して推計した主観的パラメータの推計結果をまとめたものが表 2 である．

表 2　国内企業の主観的パラメータの推計結果

(1)残高重視係数 θ の分布（864 社）

$\theta = 0$	$0 < \theta \le 0.1$	$0.1 < \theta \le 0.2$	$0.2 < \theta \le 0.3$	$0.3 < \theta \le 0.4$	$0.4 < \theta$
17%	41%	10%	5%	3%	23%

(2)望ましい残高 $\hat{x}$ の分布（715 社※）

$\hat{x} < 0$	$0 \le \hat{x} < 0.25$	$0.25 \le \hat{x} < 0.5$	$0.5 \le \hat{x} < 0.75$	$0.75 \le \hat{x} < 1$	$1 \le \hat{x}$
39%	19%	13%	6%	3%	20%

※ 望ましい残高 $\hat{x}$ は残高重視係数 $\theta = 0$ となる企業データを除いて集計

(3)望ましい償還額 $\hat{u}$ の分布（864 社）

$\hat{u} < 0$	$0 \le \hat{u} < 0.25$	$0.25 \le \hat{u} < 0.5$	$0.5 \le \hat{u} < 0.75$	$0.75 \le \hat{u} < 1$	$1 \le \hat{u}$
28%	37%	11%	8%	5%	11%

(4)主観的割引率 δ の分布（864 社）

$0 < \delta < 0.01$	$0.01 < \delta \le 0.1$	$0.1 < \delta \le 1$	$1 < \delta$
58%	13%	17%	13%

83%の企業で残高重視係数はプラスとなっており負債残高制御は安定的となっている．

残高重視係数をプラスとした企業のうち，望ましい残高をマイナスとしている（無借金化を望ましいと考える）企業が 39%に上っているほか，1991 年総資産残高比で負債残高が 0～50%を望ましいとする企業が 32%となっている．

また，望ましい償還額をマイナスとしている（ネットで元本増加による資金調達を望ましいと考える）企業は 28%にとどまっている．

さらに，58%の企業が主観的割引率を 1%未満としている．

逆にこうした強い残高重視傾向，財政健全化指向が国内企業に長期にわたって継続してきたため，成長投資機会などがあってもそれが資金調達に結びつきにくい状態になっていると考えられる．

[8] サンプルにはサバイバル・バイアスがあり，国内全企業に比して保守的な負債制御ポリシーが採用されている可能性はある．但しこれらサンプルからのデフォルト発生可能性をモニタリングすることは経済全体への影響度の観点から圧倒的に重要である．

5.　おわりに

最も単純な負債制御モデルとそれを用いた分析例を紹介してきた．こうした分析を深めることで，経済社会の安定的活動の最大の支障になる負債問題あるいはデフォルト問題の真相に迫ることが可能になるであろう．

参考文献

[1]明石一・今井弘之(1981),『詳解制御工学演習』, 共立出版.
[2]伊藤清企画・監修, 渡辺信三・重川一郎編(2012),『確率論ハンドブック』, 丸善出版.
[3]長井英生(1999),『確率微分方程式』, 共立出版.
[4]I. Karatzas and S. E. Shreve(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition*, Springer.（渡邉壽夫訳(2001),『ブラウン運動と確率積分』, シュプリンガージャパン）
[5]H. Morimoto(2010), *Stochastic Control and Mathematical Modeling, Applications in Economics*, Cambridge University Press.
[6]B. Oksendal(1999), *Stochastic differential equations, An introduction with applications, 5th edition*, Springer.（谷口説男訳(1999),『確率微分方程式－入門から応用まで』, シュプリンガージャパン）
[7]櫻川昌哉・細野薫(2007), 「日本の財政の維持可能性のカリブレーションによる検証」, Keio Economic Society Discussion Paper Series KESDP No. 07-6.
[8]R. Pindyck(1972), “An Application of the Linear Quadratic Tracking Problem to Economic Stabilization Policy”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 17, pp.287-300.

数学付録 Linear Quadratic Tracking Gaussian 問題の解

値関数を

(A-1) $$v(t,x_t)=\inf_{\{u_s\}}E\left[\int_t^\infty e^{-\delta s}\frac{1}{2}\left(\theta(x_s-\hat{x})^2+(u_s-\hat{u})^2\right)ds\right]$$ 但し $\theta>0$

と定義する．ベルマン原理よりハミルトン=ヤコビ=ベルマン方程式（HJB 方程式）

(A-2) $$\frac{\partial v}{\partial t}-\delta v+\inf_u\left[\frac{1}{2}\left(\theta(x-\hat{x})^2+(u-\hat{u})^2\right)+\frac{\partial v}{\partial x}(rx-u)+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0$$

が成立する．(A-2)式の[ ]内が下限を取るのは u の値に制約がないとき

(A-3) $$u-\hat{u}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

である．(A-3)式を HJB 方程式(A-2)に代入すれば

(A-4) $$\frac{\partial v}{\partial t}-\delta v+\frac{1}{2}\left(\theta(x-\hat{x})^2-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial v}{\partial x}(rx-\hat{u})+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

を得る．ここで均衡において値関数は t にかかわらず一定であるため $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ となり方程式(A-4)は

(A-5) $$-\delta v+\frac{1}{2}\left(\theta(x-\hat{x})^2-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial v}{\partial x}(rx-\hat{u})+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

となる．方程式(A-5)は

(A-6) $$v(t,x)=\frac{1}{2}Px^2+gx+h$$

の形の下で解を持つ．但し値関数は x の初期値に関わらず非負であるから $P\geq 0$ である．
(A-6)式を HJB 方程式(A-5)に代入すれば

(A-7) $$-\delta\left(\frac{1}{2}Px^2+gx+h\right)+\frac{1}{2}\left(\theta(x-\hat{x})^2-(Px+g)^2\right)+(Px+g)(rx-\hat{u})+\frac{1}{2}\sigma^2P=0$$

(A-7)が任意の初期値 x について成立するのは x の各次数の係数がゼロ値を取るとき，すなわち

(A-8) $$-\delta P+\theta+2Pr-P^2=0$$

(A-9) $$-\delta g-\theta\hat{x}-P\hat{u}+gr-Pg=0$$

(A-10) $$-\delta h+\frac{1}{2}\theta\hat{x}^2-g\hat{u}-\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{2}P=0$$

が成立するときである．二次方程式(A-8)の 2 根のうち $P \geq 0$ が成立するように

(A-11)　$P = r + \dfrac{-\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4\theta}}{2} = r + \lambda > 0$　但し $\lambda = \dfrac{-\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4\theta}}{2}$

を P の値として選ぶ．(A-11)式を(A-9)式に代入して g について解けば

(A-12)　$g = -\dfrac{P\hat{u} + \theta\hat{x}}{P - r + \delta} = -\lambda\kappa - \hat{u}$　　但し $\kappa = \dfrac{(r - \delta)\hat{u} + \theta\hat{x}}{(\lambda + \delta)\lambda}$

を得る．(A-3)式に(A-6)式，(A-11)式，(A-12)式を代入すれば状態 x_t が観測されたときの最適償還額 u_t が

(A-13)　$u_t = r \times x_t + \lambda(x_t - \kappa)$

に定まる．(A-13)式を本文中の状態方程式

(2)　$dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$

に代入すれば確率微分方程式

(A-14)　$dx_t = -\lambda(x_t - \kappa)dt + \sigma \times dW_t$

を得る．(A-14)式を x_t について解けば

(A-15)　$x_t = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$

を得る．なお(A-15)式中の伊藤積分 $\sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$ の期待値はゼロである．したがって

(A-16)　$E[x_t] = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa$

となる．