DBJ Discussion Paper Series, No. 1207

ベイルアウトは経済厚生にいかなる影響を及ぼすか？
ヨーロピアン・コールオプションを例として

大瀧雅之
（東京大学社会科学研究所）

2012 年 9 月

ベイルアウトは経済厚生にいかなる影響を及ぼすか？
ヨーロピアン・コールオプションを例として

大瀧雅之（東京大学社会科学研究所）

要約
ヨーロピアン・コールオプションの売り手・買い手双方の利得関数をもとに，ブラック・ショールズ公式を導出した．そしてこの利得関数に基づくアプローチを適用して，投機失敗時のベイルアウトが事前に読み込まれた場合のオプション価格を計算した．この結果，ベイルアウトが予想に組み込まれることにより投機家は，(i)より大きな利幅を求めてより危険な行動するようになること，(ii)ベイルアウトの資金が投機家以外の市民から税により徴収されるという現実を踏まえたとき，ベイルアウトの実施は確実に社会厚生を低下させること，を証明した．

１．はじめに

本稿では，リーマン・ショックの元凶となったデリバティブズのうち株式オプションを取り上げ，ブラック・ショールズ公式による理論価格が，如何なる市場構造のもとから導出されるのかを，すなわち売り手・買い手双方の期待利得関数を明示的に分析した上で，明らかにする．

このような新しいアプローチには，いくつかの優れた特長がある．第一に利得関数が明示されることで，デリバティブズが一般にそうであるように，コールオプション取引がゼロサムゲームであり，その前提からブラック・ショールズ公式も現れることが明示される．つまりコールオプションの市場価格は，株式などの本源的証券などのように資本の社会的価値を表すものではなく，それから派生した（そこに寄生した）一種の「賭け」の「賭け金」でありそれ自身何の社会的価値を表示するものではないことが，それほどの基礎知識を要せず，容易に理解できるようになる．

第二には，こうした利得関数に基づくアプローチは，ブラック・ショールズ公式の適用範囲を広げることができるという特性がある．ここでは特に，ベイルアウト（オプション取引という「賭け」に負けた者の金銭的救済策）が期待形成に織り込まれたとき，オプションの性質にいかなる影響が及ぶかを分析する．その結果，ベイルアウトは一種のモラルハザードであり，[1]損失補てんを読みこんだ投機家はより危険な投資戦略をとるようになることが明らかにされる．損失に関して責任をとる必要がないからである．

[1] モラルハザードのもたらす諸問題については，Arrow(1963)を参照のこと．

以上の議論から明らかなように，ベイルアウトはコールオプションという一種の「賭け」（ゼロサムゲーム）は，投機家同士の「賭け金」を膨張させるだけであって，それ自身何ら社会厚生を高めるものではない．さらにベイルアウトの資金が，究極的には「賭け」とは無縁の一般市民の税金によって穴埋めされることを鑑みれば，ベイルアウトは必ず社会厚生を低下させることが証明できるのである．

なお本稿の構成は，以下のとおりである．第二節では，簡単にヨーロピアン・コールオプションの商品内容について紹介する．第三節ではそれを受けて，売り手・買い手の利得関数の性質を明らかにし，これがブラック・ショールズ公式と矛盾しないことを明らかにする．第四節では，ベイルアウト条件付きのヨーロピアン・コールオプションの均衡価格を計算し，同時にその社会厚生上の意義を問うことにする．第五節は，結論である．

２．ヨーロピアン・コールオプションの構造

コールオプションはある一定の定められた価格（行使価格:exercise price）で株式を売買する権利を取引する（売る権利を取引するものをプットオプション，買う権利のそれをコールオプションとよぶ）金融商品である．このうち，満期Tに定めがあるものをヨーロピアン・コールオプションと呼び，定めのないものをアメリカン・コールオプションという．

ここではその代表選手として，ヨーロピアン・コールオプション（以下単にコールプション）を取り扱うが，他の形式のオプションにも，ここでの考え方は容易に応用できることを，予め断っておく．

３．コールオプションの性質とブラック・ショールズ公式

３．１　売り手・借りての利得関数の性質

まず，コールオプションの利得関数の性質について，いくつかの定理を簡単に証明しておこう．

定理Ⅰ　コールオプションの売り手側の利得$V^S(t,\tau)$と買い手側のそれ$V^B(t,\tau)$は

$$V^S\left(t:T\right)=\min\left[-e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T-X\right]+P_t,P_t\right],(1)$$

$$V^B\left(t:T\right)=\max\left[e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T-X\right]-P_t,-P_t\right](2)$$

として表現される．

まず次の補題が重要である．

補題１　Early exercise は確率１で生じない．

証明：$t<t'\leq T$なる時点区間t'において，ある確率で early exercise が起きたものとしよう．このとき買い手側の期待収益 $V^B(t,\tau)$については

$$V^B(t:T) \geq e^{-r[t'-t]} \int_{[S_{t'}-X]e^{-r[t'-t]}>P_t} [S_{t'}-X] d\Phi(S_{t'} \mid S_t) - P_t > 0$$

が成立する．一方売り手側の期待収益については

$$V^S(t:T) \leq P_t - e^{-r[t'-t]} \int_{S_{t'}>P_t+X} \left[S_{t'} - \left[P_t + X\right]\right] d\Phi(S_{t'} \mid S_t) < 0$$

したがって Early exercise が正の確率で存在するコールオプションは，売り手の期待収益が負となるために，供給されない．（証明終わり）

定理 I の証明 : 補題 1 より満期まで必ずオプションは持たれるから，オプションの価格は満期時の期待利得の割引現在価値により, 決定されることになる. これで定理 I は証明された.

定理 I のもとで，次の定理が成立する．すなわち，

定理 II 当該オプションの均衡価格 P_t は,

$$P_t = \max\left[e^{-r[T-t]} E_t\left[S_T - X\right], 0\right] \qquad (3)$$

によって表わされる.

この定理の証明には，次の補題が有用である.

補題２　$V^B(t:\tau) = V^S(t:\tau) = 0$ である.

証明　(1)と(2)を加えわせると明らかなように，

$$V^B(t:\tau) + V^S(t:\tau) = 0$$

このとき V^B と V^S のどちらか一方が正であれば，他は負である．すなわち，どちらかの期待利得が正であれば，他のそれは負となり，買い手・売り手のどちらかに取引をするインセンティブが消滅し，市場は成立しない．これで題意は証明された.

定理 II の証明 : 補題２を(1), (2)へ代入すると，直ちに(3)が得られる.

３．２　ブラック・ショールズ公式

次の定理の証明は，伊藤の公式から自明である.

定理 III　株価 $\left\{S_\tau\right\}_{\tau \geq t}$ が，ドリフト付きのウィーナー過程

$$\int_t^\tau dS_{t'} = r\int_t^\tau S_{t'} dt' + \sigma \int_t^\tau S_{t'} dW(t', \omega)$$

に従う時，伊藤の公式から株価の対数 $s_{t'} \equiv \ln S_{t'}$ は，次のドリフト付きウィーナー過程に従う．すなわち，

$$\int_t^\tau ds_{t'} \equiv s_\tau - s_t = \int_t^\tau \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]_{t'} dt' + \sigma \int_t^\tau dW(t', \omega) \qquad (4)$$

である．いいかえれば現在の対数株価 s_t 所与のもとでの満期時対数株価の条件付き確率分

布は，正規分布 $N\left(s_t + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right], \sigma\sqrt{T-t}\right)$ に従うことが分かる．

ではなぜ対数株価を仮定するのだろうか．こういうきつい仮定に対して無批判であってはならない．じつは(3)の条件付き期待値を解析的に求めるため（二次関数の完全平方形を作る問題に帰着させるため）に，この仮定が必要となるのである．

このことを確かめるために，早速期待値 $\int_X^{+\infty} S_T d\Phi^N(S_T \mid S_t)$ を計算してみよう．ここで

$\Phi^N(S_T \mid S_t)$ は，先ほどの正規分布の累積密度関数である，さて実際に計算してみると，

$$\int_X^{+\infty} S_T d\Phi^N(S_T \mid S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[s_T - \frac{\left[s_T - s_t - \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]}\right] ds_T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left[s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2 - 2s_t\sigma^2\left[T-t\right] - 2r\sigma^2[T-t]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]}\right] ds_T$$

$$= S_t \exp\left[r\left[T-t\right]\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi[T-t]}\sigma}\int_X^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left[s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]\right]^2}{2\sigma^2\left[T-t\right]}\right] ds_T \quad (5)$$

となることが分かる．（5）の右側の項は都合の良いことに，

$$z_T \equiv \frac{s_T - s_t - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (6)$$

とすると，標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数であることが分かる．このように期待値計算が二次関数の計算に帰着させるために，株価の確率過程(4)に関する仮定が必要となるのである．

ここまで来ると，ブラック・ショールズ公式へはあと一歩である．(3)へ(5)を代入すると，

$$P_t = S_t[\Pr(z_T \geq -z^*)] - X\exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\left[\Pr(y_T \geq -y^*)\right] \quad (7)$$

である．ここで(4)と(6)から

$$z^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad y^* \equiv \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．ここで標準正規分布の密度関数は $z_T = 0$ 軸対称であるから，

$$\Pr(z_T \geq -z^*) = \Pr(z_T \leq z^*), \Pr(y_T \geq -y^*) = \Pr(y_T \leq y^*)$$

である．この性質を利用すると(7)は，

$$P_t = S_t \Phi^{SN}(z^*) - X\exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\Phi^{SN}(y^*) \quad (8)$$

と表わすことができる．ここで Φ^{SN} は標準正規分布 $N(0,1)$ の累積密度関数であり，(8)がブラック・ショールズ公式と呼ばれるものである．

４．ベイルアウト（金融機関救済）とコールオプション

この節ではベイルアウトがコールオプションで債務を抱えた投資家に施され，それを事前に彼らが読み込んで行動するとしたとき，オプションの価格および経済厚生にいかなる影響が及ぶかを分析する．さてここでは，コールオプションの投機に敗れた投資家には B だけの公的資金の注入がなされるものとしよう．

このとき，コールオプションの買い手・売り手の期待利得は，定理 I を応用することにより，

$$V^B\left(t:T\right) = \max\left[e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T - X\right] - P_t, Be^{-r[T-t]} - P_t\right] (1'),$$
$$V^S\left(t:T\right) = \min\left[-e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T - X\right] + P_t + Be^{-r[T-t]}, P_t\right] (2')$$

ここで売り手独占(monopsony)を仮定し（買い手の価格交渉力が皆無であると仮定し），買い手の期待利得が 0 であるとすると，(1’)より，オプションの価格は，

$$P_t = \max\left[e^{-r[T-t]}E_t\left[S_T - [X+B]\right], 0\right] + Be^{-r[T-t]} \quad (9)$$

となる．

留意すべきは，(2’)と(9)より，

$$V^S(t:T) = P_t - \max\left[e^{-r[T-t]}\left[S_T - \left[X+B\right]\right], 0\right] = Be^{-r[T-t]}, (10)$$

となり，このような救済スキームが読み込まれた時の，売り手側の期待利得は厳密に正となることである（ベイルアウトという名の補助金はすべて売り手に帰着する）．したがって，売り手にはこのようなオプションを供給するインセンティブが存在し，売り手独占(monopsony)のもとでは，(9)の価格形成のもとで市場取引は確かに成立するのである．[2]

ところで(9)はベイルアウトが，オプションの価格付けに対して二つの効果を持つことを表している．第一の効果は(9)の右辺第一項の[ ]内の右側の項で表現されるものであって，実質的な行使価格が上昇することを意味している．すなわち投機に失敗しても失うものが小さくなるため，投機家はより高い株価がついたときのみに権利を行使するようになるのである．

第二の効果は，より直接的なもので(9)の右辺第二項に現れている．すなわちベイルアウトは，コールオプションというゼロサムゲーム自体に対する一種の補助金であるから，その現在価値の分だけ，コールオプションの価格を押し上げる作用があるのである．

したがって(9)にブラック・ショールズ公式を適用すれば，

定理 IV

ベイルアウトが事前に読み込まれた時のコールオプション価格は，

$$P_t = S_t \Phi^{SN}(z_B^*) - [X+B]\exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\Phi^{SN}(y_B^*) + B\exp\left[-r\left[T-t\right]\right] \quad (11)$$

として表わすことができる．ただし，

$$z_B^* \equiv \frac{\ln\dfrac{S_t}{X+B} + \left[r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad y_B^* \equiv \frac{\ln\dfrac{S_t}{X+B} + \left[r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right]\left[T-t\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．

解析的な処理が容易な場合として，$S_t = X + B$ で(10)の B に関する微分をとると，

$$dP_t = \left[[-\phi^{SN}(z_B^*) + \exp\left[-r\left[T-t\right]\right]\phi^{SN}(y_B^*) + \exp\left[-r\left[T-t\right]\right][1-\Phi^{SN}(y_B^*)]\right]dB \quad (11)$$

である．ここで ϕ^{SN} は標準正規分布の確率密度関数である．ここで，$z_B^* > y_B^* > 0$ であるから $\phi^{SN}(y_B^*) > \phi^{SN}(z_B^*)$ である．したがって，割引因子 $\exp\left[-r\left[T-t\right]\right]$ が十分 1 に近ければ，（11）の右辺第一項と第二項の差は正となり，コールオプションの価格 P_t は必ず上昇することになる．つまりベイルアウトが予想形成に織り込まれると，コールオプションという

[2] より一般的な価格形成，すなわち買い手にも交渉力がある場合には，オプション価格は非対称ナッシュ交渉解のような，交渉によって決定されることになる．この場合のそれぞれの目的関数は (V^B, V^S)，威嚇点は $(0,0)$ となる．

一種の「賭け」の「賭け金」は上昇するのである．これはこの「賭け」の賞金がベイルアウトという補助金によって高まるからに他ならない．

ところで，行使価格は(9)から明らかなように，ベイルアウトの額Bだけ上昇する．したがって買い手（売り手）が儲かった時の利幅（コールオプションが行使された時の利幅・行使されなかった時の利幅）は，ベイルアウトの総額分だけ大きくなる．だが「賭け」に敗れたときの投機家の私的損失は，以前より小さい$P_t - B$に留まる．

裏を返して言えば，ベイルアウトが実施されると確信されると，「負けた」ときの損失が局限できるために，ベイルアウトの額だけ「賞金」を上積みできるのである．同時に上述したように，「賭け」が魅力的になる分だけ，「賭け金」であるオプション価格が上昇することになる．

以上の議論に基づき，簡単なモデルを構築し，ベイルアウトの社会厚生上の意義を質すことにしよう．まず資産としては，これまで通りオプションと安全資産としての預金があるものとしよう．家計がこれらの資産の買い手であり，金融機関が売り手であるとしよう．預金市場は完全競争的で外生的に与えられた（世界）利子率rのもとで取引され金融機関が得る利潤は0である．一方オプション市場は，上述のように売り手独占で(10)に基づき価格づけられ，（10）に示されるように金融機関は正の利潤を上げることができる．

ここまで来れば，次の厚生経済学的命題は容易に理解されよう．すなわち，

定理Ⅴ　ベイルアウトの実施は必ず社会的厚生を低下させる．

証明：　ベイルアウト条件付きの期待利得関数(1') ,(2')および納税者（＝預金者　）の損失$Be^{-r[T-t]}$を加え合わせた，社会全体での総利得は0である．これに対して，金融機関が安全資産である預金を供給した時の総利得は$Be^{-r[T-t]}$で厳密に正である．したがって，社会的にはオプションではなく，預金が価値保蔵手段として供給されることが望ましい．

しかしながら，資産の供給が金融機関の自由意思に委ねられているとき，正の利潤をもたらすベイルアウト条件付き（$B > 0$）のオプションのみが供給される．よってベイルアウトの実施は，必ず社会的厚生を低下させる．

定理Ⅴの意味するところは，極めて深刻である．つまり定理Ⅴは，ベイルアウトの実施が期待形成に読み込まれると，逆に投機家同士のコールオプションと呼ばれる「賭け」に対する態度を大胆にするだけで，「賭け」の負け分を支払う一般市民が損をする構造を経済社会に埋め込むことに等しいことを主張している．つまりベイルアウトは一種のモラルハザードを引き起こす深刻な経済要因であり，金融機関(投機家の組織)の経営規律を著しく弛緩させる作用があるのである．

もちろん俗に言われるように，「潰すには大きすぎる」(too big to fail)という問題があるかもしれない．しかしそれは，問題の所在を不鮮明にする一種の「すり替え」の議論である．厳密には本稿の範囲を越えるが，ベイルアウトを不可避にさせるために，金融機関が

意図的に経営規模を拡大している可能性は高く，かつそうした場合，金融機関の肥大化を許してきた金融行政自身の姿勢が本来問われるべきであるからである．

５．結論

本稿では，コールオプションの価格付けを売り手・買い手双方の利得関数を基礎に分析し，オプション市場へのベイルアウトの適用が社会的厚生にいかなる影響を及ぼすかを分析した．

第一に，オプション価格を発見論的に導出した Black and Sholes(1973)に比べ，このようなアプローチには，次の優れた特性がある．すなわち，オプションが本質的にゼロサムゲームの一種の「賭け」であることを明示しながら，ブラック・ショールズ公式を導出できることである．同時に第三節で示されたように，こうした確固とした基礎を持つアプローチの採用により，ベイルアウトが読み込まれた際のオプション価格を正確に導出することに成功した．

第二に，ベイルアウトのオプション価格への影響および社会厚生への影響を分析することができた．すなわち，ベイルアウトはオプションの行使価格を実質的に同額だけ上昇させる．これは損失が補填されるために，各投機家が強気となりより多くの利得を求めるからに他ならない．さらにオプションがゼロサムゲームであることから，ベイルアウトの実施は同額だけの社会的費用を不可避的に伴う．したがって，ベイルアウトは必ず社会厚生を低下させるのである．

参考文献

[1] K. J. Arrow, `Uncertainty and the welfare economics of medical care,' American Economic Review Vol. 53 (1963), pp. 941-973.

[2] F. Black and M. Sholes, `The pricing of options and corporate liabilities,' Journal of Political Economy, Vol. 81 (1973), pp. 637-654.