ISSN 0389-0015

# 経済経営研究

## ECONOMICS TODAY

Volume 35 Number 2

# 最適負債制御問題

2014年10月

日本政策投資銀行 設備投資研究所

経済経営研究
Vol. 35 No.2　2014 年 10 月
日本政策投資銀行設備投資研究所

# 最適負債制御問題*

吉 村 浩 一†
（日本政策投資銀行設備投資研究所）
渡 邉 修 士‡
（日本大学経済学部）

* 本稿の作成に当たって，大瀧雅之（東京大学），細野薫（学習院大学），神藤浩明（日本政策投資銀行設備投資研究所），中村純一（日本政策投資銀行設備投資研究所），岡本弦一郎（日本政策投資銀行設備投資研究所）のほか，日本政策投資銀行設備投資研究所でのセミナー参加者各位から，貴重な助言をいただいた．

† 設備投資研究所前副所長・客員主任研究員
‡ 日本大学経済学部教授

# Optimal Debt Control Problem

Economics Today, Vol.35, No.2, October, 2014

Koichi YOSHIMURA
Research Institute of Capital Formation
Development Bank of Japan
and
Shuji WATANABE
College of Economics
Nihon University

# 要　旨

現代の経済社会においては，政府債務をはじめとして経済主体が巨額の負債を抱えるリスクが大きな問題となっており，その制御可能性を検討することは最重要の経済問題である．ソブリン債危機やリーマン・ブラザーズ破綻などは，いわば負債が制御不能に陥ってしまった経済事象であるが，なぜそれが制御不能に陥ったのか，そのような事態の回避はできなかったのかという問いについて経済的事実を列挙するだけでは，問題が複雑すぎて明快な答えを見出すことは困難である．そこで本論ではできる限り単純化したモデルを用いて問題の本質にアプローチしていく．これにより今日の負債制御に関する問題の本質が明らかになることが期待される．

債務者の負債制御ポリシーは，モデル内部の一連の主観的パラメータにより表現される．基本モデルに負債残高上限と償還額上限からなる許容条件を付加すると，主観的パラメータの条件次第で許容される制御領域で制御不能の状態に陥るケースが現れる．こうした制御不能の状態をデフォルトと定義するとき，債務者の負債制御ポリシーが近視眼的な場合にデフォルト発生の可能性が高まること，デフォルト回避のためには将来の償還能力の予測についての慎重な評価が重要な役割を果たすことが明らかになる．

債務者が負債を最適に制御しているという仮定の下，理論計算による負債残高と現実の残高の乖離幅の二乗和を最小化することを通して，債務者の主観的パラメータを探索する．これから得られた各債務者の主観的パラメータを用いることで，その負債制御ポリシーの健全性比較等の定量的な分析が可能となる．

キーワード：負債管理，政府債務，企業債務，最適制御，確率制御，カリブレーション

*JEL Classification*：C61，C13，G32，H63

# 目　次

## 1.　はじめに

今日の経済では，政府や民間企業など数多くの経済主体が，金融市場，なかんずく，債券市場・ローン市場を通じて多額の資金を調達し，その資金を用いて多様な活動を行っている．政府の場合は，税収の不足分を国債発行により調達し，医療・福祉，教育などのサービスを提供しているし，企業の場合は，社債やローンで調達した資金を設備資金や運転資金として運用している．毎日何兆円という資金が金融市場を介して資金の貸し手から借り手に提供され，一方で借り手から貸し手に元利金の返済が行われている．金融市場は今日の市場経済における重要なインフラストラクチャーである．こうした金融市場の機能が損なわれるならば，市場経済は大きく混乱し，広範な経済主体の厚生水準は大きく低下するであろう．2008 年 9 月のリーマン・ブラザーズの破綻はその最たるもので，金融市場の機能不全はたちまち世界中に波及し，生産水準は急落，多数の失業が発生した．

金融市場という社会的共通資本が正常に機能するためには，金融市場における主要なプレーヤーがその道のプロフェッショナルとしてそれぞれ責任ある役割を果たすことが求められる．監督機関は制度やルールを設計し，それに基づいて，金融機関が不適切な取引を行っていないか厳格なモニタリングを実施しなければならない．中央銀行は，その時々の経済情勢を踏まえて長期的視点に立って，適切な金融政策を遂行しなければならない．

本稿では，金融市場において重要な役割を果たす債務者の負債管理の問題（これを負債制御問題と呼ぶ）に焦点を当てて分析する．とりわけ，国債発行によって巨額の資金調達を行う政府や，短期市場から多額の運転資金の調達を行う世界的な投資銀行や商業銀行などの主要な債務者の負債管理の失敗は，大きな惨禍を社会経済にもたらし，安定的な経済活動の妨げとなる．Too big to fail と称される彼らの問題は，その市場における規模や役割が大き過ぎて破綻を放置できないことである．

ところで，債務者が負債を適切に管理しデフォルトを回避することは，ある意味で当たり前のことであり，そのための最善の方策が取られて然るべきである．それにも拘らず，ギリシャの債務危機やリーマン・ブラザーズの破綻など巨大なデフォルト[1]がしばしば発生するのは何故だろうか．以下で論じるように，債務者の負債管理は，負債の残高の管理と償還財源の管理からなり両者は密接に連関している．現実が物語るのは，そのバランスを取ることはことのほか難しいということなのであろう．負債制御の失敗による社会的損失が非常に大きいとすれば，こうした負債制御問題の背後の構造を解明することは意味があると言えるだろう．

ギリシャやリーマン・ブラザーズのような例をいくつも取り上げて，彼らが何故制御不能に陥ったのか，そうした事態を回避する術はなかったのかについてこと細かく事実に立脚して検討することは，よく取られるアプローチである．しかし，こうした手法は，ややもすれば特殊な事例研究や歴史的叙述に終わりがちのように思われる．そうなるのは，それぞれの問題に固有な構造や諸事情が複雑に絡まり合い，負債制御の本質的問題の解明をひどく困難にしているからではないか．本稿では，演繹法の基本に立ち返り，可能な限り単純化したモデルを提示し，その分析を通して問題構造を捉え，政府や企業を問わず適用可能な一般化された負債制御の問題点に接近していく．

政府の負債制御の失敗について付言するならば，政府は医療・福祉，教育など広範なサ

[1] 本研究において「デフォルト」は負債制御理論の観点から定義される（p.17 参照）．

ービスの最大の供給者であるため，政府の負債制御の失敗は政府が担うこれらのサービス機能の全面的な麻痺に直結する．これが如何に深刻な問題であるかは誰の目にも明らかである．このため，政府が適切な負債制御を行うことは何にもまして重要な優先課題といえる．然るに，我が国の対 GDP 比国債残高は主要国のなかで最も高水準となっており，現在も高まりつつある．このように考えると，政府や巨大企業の負債制御の失敗は，彼らが担う社会的共通資本を揺るがしかねない重大な問題であると言えるだろう．

本稿の第 1 のテーマは，できるだけ単純な負債残高の制御モデルを示すことにある．これにより今日の負債の制御に関する問題の本質が明らかになることが期待される．このモデルに基づいて，デフォルト発生のプロセスを解明しデフォルト発生の回避可能性を検討することが重要であり，これが第 2 のテーマである．その上で，負債制御モデルを使って現実の負債残高の動きからそれぞれの経済主体が定めている負債制御ポリシーの比較を試みてみたい．これが本稿の最後のテーマである．

## 2. 現実経済における負債残高の動き

モデル分析に立ち入る前に，政府債務残高の動きと国内企業の負債残高の動きを概観しておこう．現実の事例を見れば，本研究の動機は自ずから明らかになるだろう．

### 2.1. 政府債務の動き

図 1 は，名目 GDP 比で示した一般政府の純負債残高（以下，一般政府の純負債については単に負債または政府債務と略記する[2]）の動き（1991 年～2011 年）である．例えば，日本政府のそれは 1991 年当時，各国比較で相対的に低いレベルにあった．しかし，その後は単調に増加し，最近ではギリシャに次ぐ水準になっている．これは偏にバブル崩壊後 20 年以上に及ぶ経済の不振を背景とした税収の伸び悩み等による歳入の不足と，景気・雇用対策や高齢化の進展等を反映した社会保障費の著増，かかる財政構造の変化に対応して迅速に実施されるべき税制改正の遅れの結果，赤字国債発行への依存が常態化したことによるものと言える．再三にわたる問題点の指摘にも拘らず，このような負債残高増大に対してかなり緩い制御が長期にわたり維持できたのは，国内貯蓄が国債の増発を吸収可能であったことや低金利によって国債の利払い費が抑制されたことによる[3]．一方，金融危機発生以前の欧米諸国の負債残高の変化は日本とは大きく異なっている．欧米では 1990 年代半ば以降好景気が持続し，これが負債制御の問題を容易にした．米国では，好景気による財政の好転を受けて 2000 年初頭まで対 GDP 比負債残高は大きく減少し，2001 年には 34%まで低下した．その後はイラク戦争等による戦費の増加はあったものの，好景気を背景に税収が潤沢であったことから負債残高が大きく上昇するには至らなかった. 他方, 欧州では 2000 年初頭まで対 GDP 比負債残高は大きく減少した. 欧州では長年にわたる通貨統合の努力が結実し, 1999 年に共通通貨ユーロが導入された. その際, 通貨統合参加の条件として, 1992 年調印のマーストリヒト条約に基づき，毎年の財政赤字を対 GDP 比で 3%以内とすることや, 明確な景気後退と判断されないときは債務残高を対 GDP 比で 60%以内とすることなどが求められた．各国がこれらの基準を財政運営の重要な指標として行動したことが，欧州の負債残高減少の大きな理由であった．この結果，欧州でも対 GDP 比純負債残高は，ギリシャ，イタリアを除けば，各国とも低水準にとどまっていた.

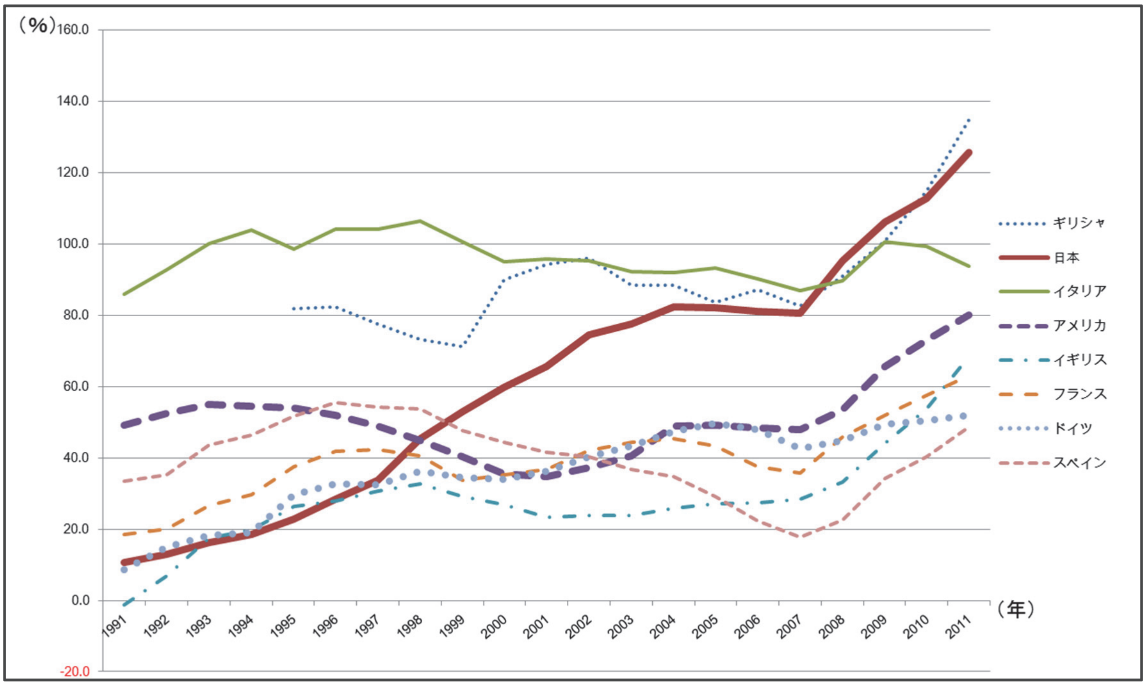
しかし，2008 年のリーマン・ショックを引き金とする金融危機は，世界各国に波及し生産活動は大きく低下，それまでの好景気から一転して深刻な不況に陥った．こうした中，バブル崩壊後の「失われた 10 年」と呼ばれる長期の景気低迷に苦しんだ日本の失敗を繰り返すまいと，各国政府は積極的な財政・金融政策を講じた．その結果，金融危機勃発から 6 年が過ぎた今も，殆どの国で財政赤字は深刻な問題である．とりわけ，ギリシャやスペインなど南欧諸国は国債の借り換えが一時困難となり，2012 年には欧州債務危機と呼ばれる状況に陥った．これらの国では，財政赤字幅を対 GDP 比で一定以下に抑えるために財政支

[2] 債務性のない負債の経済問題は存在するが，本稿では負債と債務の両者の区別はしない.

[3] 昨今デフレの害悪が問題とされているが，デフレに起因する低金利故に国債の残高増加が可能となった. 金融と財政を切り離して考えることには問題が多く，両者の関連には注意が必要である.

出の大幅削減や増税等対策を進めているが，国民の反発は大きく景気低迷と相俟って財政赤字は寧ろ拡大しており，その結果，負債残高抑制は困難を極めている．このように，政府の負債制御は非常に難しい問題と言える．

なお負債残高としては各国の財政健全度を比較する観点から対名目GDP比純負債残高を用いた．この場合，明確な景気後退時の負債残高の増加効果や好景気時の減少効果を打ち消すために金利調整を行うこともあるが，本分析では，金利をGDP成長率で調整することはせず，その増減効果は純償還額に含めて分析している．なおGDP成長率を直接制御に取り込まない形でこの問題を扱うには，負債残高と併せて名目 GDP を**状態変数**[4]として扱う必要がある．




（出所）IMF Economic Outlook No 91 - June 2012 - OECD Annual Projections

図 1　各国政府の対 GDP 比純負債残高

[4] 一般に $u(t)$ と $y(t)$ を制御システムの**入力**と**出力**とし，その特性を方程式

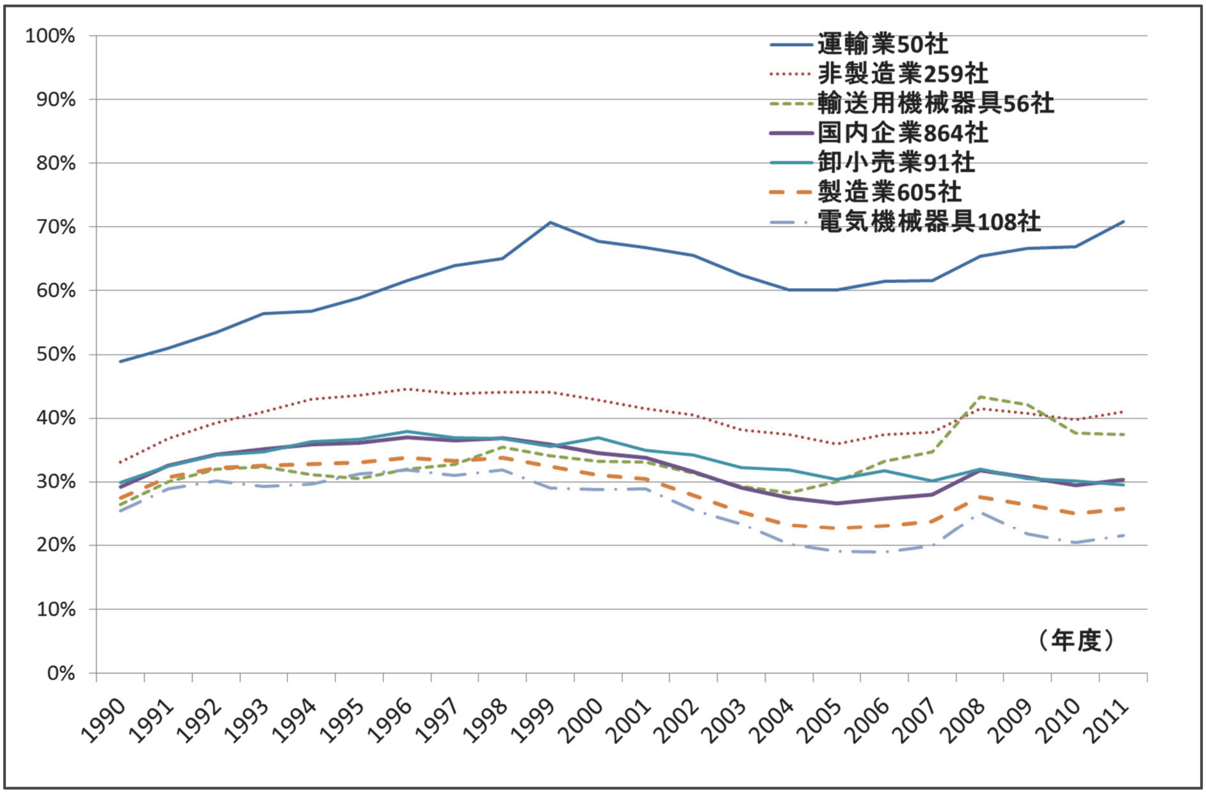
$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$$

$$y = g(x,t)$$

を用いて表すことができるとき，$x(t)$ は状態変数，それぞれの方程式は状態方程式と出力方程式よばれる．なお，本稿では出力方程式に関する問題は省略する．

## 2.2.　国内企業債務の動き

図 2 は，国内企業の負債残高の動きである．一般政府の負債残高の動きとは対照的に，この間，主な産業において負債残高を増加も減少もさせず，安定的な水準をキープしてきたことがわかる．国内企業の負債制御は特段問題ないように見える．




※1991 年総資産を 100%とする長短借入金＋社債残高推移からなる総負債残高の単純平均.

（出所）日本政策投資銀行『財務データバンク 2012 年版』一部・二部上場会社，連結ベース.

図 2　国内企業の負債残高

## 2.3.　負債残高の動きの分類

次節で示される通り，次期の負債残高は元本元高と発生金利に対する元利償還額を控除し，新規の元本調達額を加算することで定まる．ここで元利償還額から元本調達額を控除したネットの償還額を考えると，債務者はネット償還額を増減させることにより負債残高を制御させていると考えることができる．

制御は「ある目的に適合するように対象となっているものに所要の操作を加えること」と定義され，主に次の 5 つの要素から構成される．

①制御対象：制御の対象となる系で，ここでは負債取引がこれに当たる

②制御装置：検出部，比較部，制御演算部，操作部からなり，操作量を生成する装置のこと．ここでは債務者の負債取引にかかる認識測定，意思決定，契約実行部門がこれに当たる

③制御目的：ここでは制御過程または制御結果を債務者が主観的に設定する基準に従って評価し，その評価成績を最も良くすることが目的となる

④操作量（操作変数）：ここでは負債取引で実行されるネットの償還額がこれにあたる

⑤制御量（状態変数）：ここでは負債取引により定まる負債残高がこれにあたる

すなわち負債残高は，債務者が設定した目的に適合するように償還額を操作して定まる制御量となっている．

代表的な制御には，次のようなタイプのものがある．

(i)　フィードバック制御

フィードバックによって，制御量（負債残高）と目標値を比較しその誤差が小さくなるように償還額を生成する制御である．

適切に設計されたフィードバック制御システムにおいては，目標値が制御量の均衡値（平衡値ともいう）になる．均衡値とは制御に従う制御量 $x_t$ が

$$x_t \to \text{均衡値} \qquad (t \to \infty \text{のとき})$$

となる水準のことである．一般的には必ずしも目標値が均衡値になるとは限らないし，均衡値が存在しなかったり，複数個存在することもある．

また制御量が直接観測できるとも限らず，その場合は観測可能な量から推定することになる．例えば雑音を考慮した観測手法としてカルマンフィルタがあるが，本研究では負債残高は直接観測可能であると仮定する．

さらに時間的に変化する目標値に追従させるフィードバック制御システムのことをサーボ系というが，本研究では目標値は固定値と仮定して考察する．

制御装置にこうしたフィードバックループがなく制御量（負債残高）を考慮せずに操作量（ネットの償還額）を決定する場合はシーケンス制御と呼ぶ．

(ii)　最適制御

操作量（ネットの償還額）または制御量（負債残高）を，債務者が定める基準に従って

評価し，その評価成績を最も良くするような操作量を生成する制御を最適制御と呼ぶ．基準の評価成績を最も良くするとは，この後論じるようにネットの償還額や負債残高を引数とするコスト関数を最小化することをいう．

負債残高の動きを見るとき，単に増加傾向にあるのか減少傾向にあるのかだけでなく，残高が何らかの原因でいったん均衡値から離れたとき，ますます離れていくのか，あるいは均衡値に戻ろうとするのか制御の安定性を見極めることが重要である．このようなシステムの特性を初期値応答特性という．

工学的な制御システムは，制御量が均衡値に収束するよう安定性を考慮して設計される．安定的でない制御システムが設計されることはほとんどないであろう．さらに制御量と目標値の誤差ができるだけ短い時間で十分に小さな許容範囲に収まるようにしたり，制御の過程で発生するオーバーシュートのピークを一定範囲に収まるようにするなどの過渡的応答特性が考慮される．

しかし，工学的制御とは異なり，経済的な意思決定の結果としての負債残高は必ずしも均衡値に向けて安定的に動くよう制御されているとはかぎらない．図 1 の政府債務の動きを見ると，むしろ発散的な動きが目立つ．図 3 は負債の初期残高がわずかでも均衡水準から乖離すると，ますます乖離幅が拡大する不安定な制御が行われる場合を模式的に示している[5]．

---

[5] 例えば $t$ 期の負債残高を $x_t$，均衡残高を $\bar{x}$，両者の誤差に対する調整速度を $\lambda$ とすれば，フィードバック制御による負債残高の動きは微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(x_t - \bar{x})$$

によりあらわされる．解は初期値 $x_0$ の下で

$$x_t = (x_0 - \bar{x})e^{\lambda t} + \bar{x}$$

となる．

$\lambda > 0$ のとき $x_t$ は，$x_0 > \bar{x}$ ならば無限大に発散し，$x_0 < \bar{x}$ ならば無限小に発散する（図 3）．$\lambda < 0$ のとき $x_t$ は，均衡残高 $\bar{x}$ に収束する（図 4）．

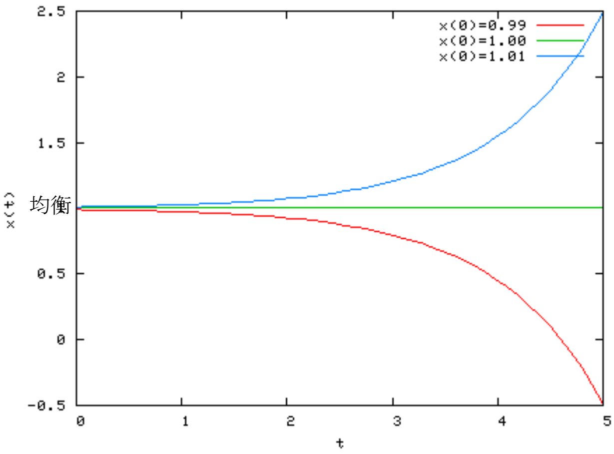


図 3　均衡に対して発散的

制御システムにおいて，債務者が予め目標値となる負債残高を定め目標値とフィードバックされる制御量との誤差が時間の経過とともに縮小するような制御を行っているとすれば，負債残高の動きはその目標値を均衡値として収束的な動きを見せることになる．図 2 の企業負債では，長期にわたる均衡収束的な動きが見られる．図 4 が模式的に表すのは，均衡から乖離したときオーバーシュートすることなく負債残高が均衡水準に向かうような安定的な制御である[6].

工学的に設計された制御システムは，制御によって制御対象の動学的な特性を改善することを目的としている．しかし我々が分析する負債制御は，工学的に設計されたものではない．また経済的な制御システムの場合，経済的な制御システムの場合，(i) 制御対象となる変数が多く存在する，(ii) 負債残高が必ずしもトッププライオリティの制御対象とならない，あるいは，(iii) 制御量がとりうる許容領域が明確に定められていないなどの問題がある．このため経済的な制御システムは，制御によってむしろある種の制御量は不安定性を増幅することがあり，最終的に制御不能になる場合さえある．経済的な制御システムに内在する問題点をここで述べたような観点から認識し負債制御を考察することは，その有効性を向上させる．

[6] 安定的なフィードバック制御であっても振動により制御量が均衡値を突き抜けてオーバーシュートが発生することがある．制御量の均衡復帰に向けた立ち上がり時間とオーバーシュートの大きさは，一般にトレードオフ関係にある．本研究では単純化した動学モデルを扱うことで制御量の振動やオーバーシュートの考察は特に行わない．しかし複雑な経済システムの分析においては，制御におけるオーバーシュートを考察すること（迅速な目標達成とそれに伴う反動の大きさのトレードオフ問題）は重要である．

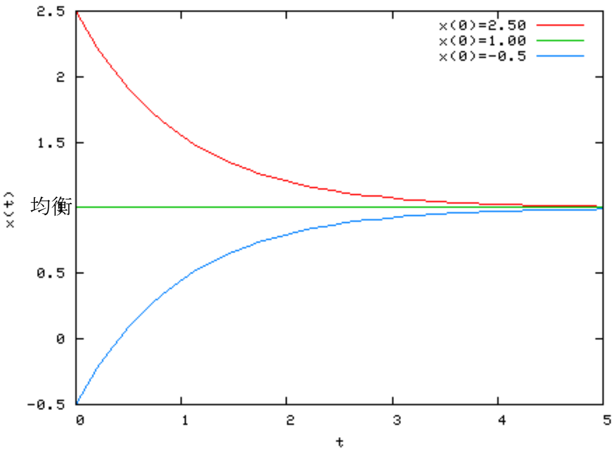



図 4　均衡に対して収束的

しかし，現実の負債残高の制御を決定づけるあらゆる要因を全て考慮に入れて分析することは容易ではない．そこで制御要因を単純化したモデルを用いることで分析を効率的に進めることができるようになる．以下では，負債残高の制御に対象を絞り込みつつも，様々な負債残高の動きを説明できる理論モデルを構築する．

もちろん政府と企業ではガバナンスの仕組みも大きく違うし，政府の公的目標と企業の私的目標にも大きな違いはある．しかし，経済主体の個別具体的な問題にとらわれず，負債残高の制御に問題の焦点を絞り込んでモデルを単純化することで，負債制御の特性を決定づける因子を明らかにし，デフォルト問題に効率的に迫ることが可能になるだろう．

3.　負債制御モデルの提示

3.1.　基本モデル

ここで提示するモデルのベースとなる考え方は，債務者は予め定めた望ましい負債残高と望ましい償還額[7]ができるだけ達成されるように負債を制御するというものである．ところが，実際には現実の負債残高や償還額は望ましい水準に一致するとは限らない．実現値が望ましい水準と一致しないとき，債務者にとっては**主観的コスト**が生じることになる．

実際の主観的コストを簡単な数式で表すことはできないが，それを敢えて単純に模式化し，債務者の**主観的コスト** $J$ を次の通り定義する．

(1)　$$J = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\theta \times (x_t - \hat{x})^2 + (u_t - \hat{u})^2\right)dt\right]$$

$E[\ ]$：時点 $t=0$ での期待値

$\delta$ ：主観的割引率（正値定数）

$x_t$ ：$t$ 期の負債残高（状態変数）　$\hat{x}$：望ましい負債残高（定数）

$u_t$ ：$t$ 期の償還額[8]（操作変数）　$\hat{u}$：望ましい償還額（定数）

$\theta$：残高重視係数（非負値定数）

即ち，（1）式は，主観的コストを今後発生する将来コストの割引現在価値の期待値と定義するものである．

この定義式のポイントは次の通りである．

① 以下で述べる通り，負債残高は確率的ノイズ（外乱）の影響を受けるが，確率的ノイズの発生確率（確率測度）は既知として将来の償還額を定めることで，将来コストの現在価値の期待値を計算可能とする．その期待値を主観的コストと定義する．

② 将来コストの現在価値を計算するときの割引率は，各債務者が主観的に定めることになる．これを**主観的割引率** $\delta$ と呼ぶ．近視眼的な債務者ほど主観的割引率は大きくなる．逆に，長期的視野に立つほど主観的割引率は小さくなり，将来コストへの影響を考えた行動を取ることになる．即ち，経済主体が短期志向的に行動するか長期志向的に行動するか，いずれを選択するかについての決定因子が主観的割引率である．

③ $t$ 期の将来コスト「$\theta \times (x_t - \hat{x})^2 + (u_t - \hat{u})^2$」は現実の負債残高 $x_t$ と**望ましい残高** $\hat{x}$[9]の間の誤差（負債残高ギャップ）および償還額 $u_t$ と**望ましい償還額** $\hat{u}$ の間の誤差（償還

---

[7] 以下では「償還額」はネットの元利償還額すなわち「総元利償還額－総元本調達額」のことであり，マイナス値の償還額はネットでみた元本増加額となる．

[8] 厳密には，$u_t$ は瞬間的な償還速度を意味し，十分短い期間 $[t, t+dt]$ における償還額が $u_t \times dt$ となる．

[9] 各債務者（企業または政府）は，最適事業規模を決定し資金調達（自己資本または負債）の最適ミックスを決定すると考えれば，望ましい負債残高 $\hat{x}$ は必ずしもゼロにならないと考えられる．企業の場合は，償還の必要のある負債による調達は倒産リスクを高めることになるが，例えば，税制上の観点から同じ資本コストであれば，支払配当とするよりも税務上の損金に計上できる支払利息とするほうが有利になる場合がある．また政府の場合は，増税よりも国債発行のほうが政治的に実現しやすい．かくして，本モデルにおいては，$\hat{x}$ を必ずしもゼロとはならない適当な定数として扱うこととする．

額ギャップ）それぞれの平方の線形和として定義される．即ち，この設定は，それぞれの誤差の平方に比例して将来コストが大きくなることを表している．**残高重視係数** $\theta$ は，負債残高ギャップが主観的コストに影響する相対的ウエイトを表す非負の係数である．残高重視係数が大きくなるにつれて，残高ギャップは主観的コストに大きく影響しその縮小を一層重視することになる．逆に残高重視係数がゼロになると，残高ギャップは主観的コストに全く影響しなくなり，償還額ギャップの縮小しか考えない制御になる[10]． $\theta$ の大小は負債制御の結果を大きく左右する．

④ 残高重視係数 $\theta$，望ましい残高 $\hat{x}$，望ましい償還額 $\hat{u}$，主観的割引率 $\delta$ の 4 つのパラメータ[11]は，負債制御を行う前にこのモデルの枠外で債務者が主観的に決定するものと仮定する[12]．そしてこれらが個々の債務者の負債制御ポリシーの属性を定めることになる．

次に償還額と負債残高の動学的な関係式

(2) $$dx_t = \left(r \times x_t - u_t\right)dt + \sigma \times dW_t$$

$r$ ：平均支払金利（非負定数）

$\sigma$ ：確率的ノイズの標準偏差（非負定数）

$W_t$ ：フィルター付き確率空間 $\left(\Omega, F, P; F_t\right)$ 上で定義された 1 次元 $F_t$ -標準ブラウン運動

を定める[13].

[10] パラメータ $\theta$ の大小が，具体的に企業経営者あるいは国家のどのような現実的な特性に対応しているかを検討することは重要である．負債調達は，現在の手元流動性を高め将来の手元流動性を低くする経済行為であり，負債返済はその逆である． $x_t > \hat{x}$ の状況についていえば， $\theta$ の大小は，将来と現在のどちらの手元流動性を優先するかという債務者の判断特性を表すパラメータと捉えることができる．即ち，経営者が将来の経営の返済負担の増加を前提に当期の手元流動性を高めるのは，手元流動性を高めることで将来の事業機会を拡張するほうが有利と判断するからである．株主をはじめとするステークホルダーに説明責任を負うことから，自信がない経営者は逆に $\theta$ を大きくして無難な経営を重視する可能性もあり， $\theta$ が大きいことが手放しで評価できるわけではない．一方，将来世代の負担の増加を前提に，当期の財政支出余力を高めるということが国債発行の本質である．現在世代の望ましい手元流動性を重視して， $\theta$ を低めて国債を発行する場合，国民貯蓄の裏付けが存在することや，最終的に負担を負う国民に対し説明責任を果たすことが求められる．

[11] 冒頭に述べたできる限り単純化したモデルを用いて問題の本質に迫るアプローチの観点から，本モデルではこれらのパラメータがどのような内部的な最適化構造を持つかについて立ち入らないが，それらを統合したより一般化されたモデルを否定しているわけではない．

[12] 主観的パラメータを制御系の外生変数として統計的手法などにより制御系の入出力データから直接カリブレーションするのではなく，異時点間の債務者の効用関数，生産関数等からなる主観的パラメータを内生化した系を仮定し，それらを個別推計するアプローチもありうる．しかし，本研究ではそれよりもむしろ，与えられたパラメータによって制御結果が如何なるものになるか，そして負債残高制御の有効性を高める改善可能性の検討に主眼を置く．

[13] 状態方程式を実装するために必要なパラメータは，発生利息を計算するための金利水準 $r$ と確率的ノイズの標準偏差 $\sigma$ などの統計的特性であるが，これらは主観的パラメータではない．本研究では，計算の簡便さから 1 次元 $F_t$ -標準ブラウン運動を仮定している．

これは十分短い期間$dt$においては，償還額$u_t$と確率的ノイズ$\sigma \times dW_t$が定まれば，負債残高の増分$x_{t+dt} - x_t$が従属的に定まる関係を表す．このような操作量（償還額）と確率的ノイズが将来の状態（負債残高）を定める方程式を**状態方程式**という．状態方程式の制約により，債務者は，償還額$u_t$と従属して定まる将来の負債残高$x_{t+dt}$をそれぞれ独立して望ましい水準に選ぶことができなくなる．例えば，望ましい残高を達成しようとしても，償還額は望ましい水準には一般的には一致しない．

最後に，債務者は各時点で観察される確率的ノイズを前提として，状態方程式の下で主観的コストを最小にするよう償還額を選ぶものと仮定する．即ち，フィルター付き確率空間，ブラウン運動，償還額の組からなる許容制御$\gamma = (\Omega, F, P; F_t, W_t, u_t)$から$J$を最小にするものを選ぶのである．以下では，主観的コストを最小にする償還額$u_t$を単に**最適制御**という．

ただし，ここでいう最適制御は，客観的に見た債務者にとっての最善の制御を意味するものではない．ここでの最適制御は，債務者が決定した主観パラメータの最適性までは意味せず，あくまで債務者が主観的に定めたパラメータが与えられたときの，限定的な最適性を意味するにすぎない．

以上の基本モデルのセットアップを整理すれば，次の通りである．

$$\inf_{\{u_t\}} : J = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\theta \times (x_t - \hat{x})^2 + (u_t - \hat{u})^2\right)dt\right]$$

$$\text{s.t.}\ \ dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

この基本モデルに基づく最適制御解について，まず残高重視係数ゼロの場合の解を求め，次にこの係数が正値をとる場合の解を求めることにする．

(i) 残高重視係数ゼロ（$\theta = 0$）の場合

問題は

$$\inf_{\{u_t\}} : J = E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}(u_t - \hat{u})^2 dt\right]$$

$$\text{s.t.}\ \ dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

となる．主観的コストに$x_t$を含まないことから，残高$x_t$と望ましい残高$\hat{x}$とのギャップは主観的コストに影響を与えず，状態方程式は制約条件としてバインディングでない．明らかに$J$は

$$u_t \equiv \hat{u}$$

のとき最小値ゼロをとるから，これが最適制御となる．最適制御は$\hat{u}$の水準にのみ依存して決定される．負債残高の実績値はフィードバックされることはないため，この負債制御はシーケンス制御となる．

このような最適シーケンス制御に従うときの将来の負債残高の期待値を求める．$u_t \equiv \hat{u}$ を状態方程式（2）に代入すれば，

$$dx_t = (r \times x_t - \hat{u})dt + \sigma \times dW_t$$

を得る．これは加法ノイズを持つ線形確率微分方程式であり，初期値 $x_0$ の下で解は

$$x_t = \left( x_0 - \frac{\hat{u}}{r} \right) e^{rt} + \frac{\hat{u}}{r} + \sigma \int_0^t e^{r(t-s)} dW_s$$

となる．両辺期待値を取ると，右辺第３項は伊藤積分（即ち期待値は零値）であるから

$$E[x_t] = \left( x_0 - \frac{\hat{u}}{r} \right) e^{rt} + \frac{\hat{u}}{r}$$

を得る．ここで，$\hat{u}/r$ は $\theta = 0$ の下での均衡負債残高である．なお，期待値を取ると，将来の残高の動きは $\sigma = 0$ の場合と一致するが，将来残高の予測誤差 $\sigma \int_0^t e^{r(t-s)} dW_s$ は時間の経過と共に累積していくことに注意が必要である（予測誤差の分散は時間と共に増加する）．期待値はあくまで期待値でしかなく，時間の経過とともに確率的ノイズが加わると，実際の残高は当初の期待値から大きく乖離する可能性がある．

$\theta = 0$ の下での均衡負債残高 $\hat{u}/r$ に，負債残高の初期値が一致していないと残高の期待値は発散する．即ち，僅かでも残高の初期値が均衡負債残高を上回れば，償還額が常に利払いを下回ることにより，残高の期待値は発散的に増加し，下回れば発散的に減少する（図３の「均衡」が均衡負債残高に相当する）．

（ii）残高重視係数プラス（$\theta > 0$）の場合

これは，残高ギャップと償還額ギャップの双方が主観的コストに影響する場合である．問題は

$$\inf_{\{u_t\}} : J = E\left[ \int_0^\infty e^{-\delta t} \left( \theta \times (x_t - \hat{x})^2 + (u_t - \hat{u})^2 \right) dt \right]$$

$$\text{s.t.} \quad dx_t = (r \times x_t - u_t)dt + \sigma \times dW_t$$

ただし，　$\theta > 0$

と定式化される．

この Linear Quadratic Tracking Gaussian 問題と呼ばれる最適制御問題を解くと，最適制御は次の通りとなる（数学付録（A）参照）．

$$u_t = \hat{u} + \{(r + \lambda)x_t - (\lambda\kappa + \hat{u})\}$$

ただし，　$\kappa = \dfrac{\hat{u}(r - \delta) + \theta\hat{x}}{(\lambda + \delta)\lambda}$

$$\lambda = \frac{-\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4\theta}}{2}$$

となる．ここで，$\kappa$ と $\lambda$ は，それぞれ $\theta > 0$ の時の均衡負債残高と残高調整速度を表す．

これを状態方程式に代入すれば,

$$dx_t = -\lambda(x_t - \kappa)dt + \sigma \times dW_t$$

となる．これも上と同じ加法ノイズを持つ線形確率微分方程式であり，解は

$$x_t = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$$

となる．両辺の期待値をとれば

$$E[x_t] = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa$$

を得る．

このとき $\kappa$ は，利払いと最適償還額が均衡する結果，**負債残高が一定となる均衡負債残高**となっている．均衡負債残高 $\kappa$ に到達すると負債残高は維持される．何らかのショックで負債残高が一度均衡負債残高から離れたとき，定率 $\lambda$ の速度でその乖離を縮小（$\lambda > 0$ のとき）または拡大（$\lambda < 0$ のとき）させる力が負債残高に働く．この定率速度 $\lambda$ を**残高調整速度**と呼ぶ.

$\theta > 0$ 時の均衡負債残高 $\kappa$ に対して, 負債残高の期待値が収束的に動くか発散的に動くかは，残高調整速度の正負によって定まる．もし残高調整速度が正値であれば，負債残高の期待値は均衡負債残高に収束する（図 4 の「均衡」部分が均衡負債残高に相当する）．逆に，残高調整速度が負値であれば，均衡とのギャップが拡大することになるため，負債残高の期待値の動きは一転して発散的になる（図 3 の「均衡」部分が均衡負債残高に相当する）.

なお，$\theta = 0$ の場合と同様，実現していく負債残高と期待値との予測誤差 $\sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$ は時間の経過と共に累積していくが，もし残高調整速度 $\lambda$ が正値であれば，$t$ を大きくとるとき限界的な確率的ノイズの影響は指数的に小さくなるが，逆に残高調整速度が負値であれば，限界的な確率的ノイズの影響は指数的に大きくなる.

残高調整速度 $\lambda$ の正負は，次の関係式によって定まる.

(i) $\delta < r + \dfrac{\theta}{r}$ ならば，$\lambda > 0$ となり負債残高の期待値の動きは均衡収束的である.

これは，主観的割引率が，利子率 $r$ や残高重視係数を利子率で割り戻したもの $\dfrac{\theta}{r}$ に比較して十分小さい状況，即ち，債務者が将来のコストまで考慮する長期志向的である場合は，負債残高の期待値の動きは均衡収束的になることを意味する.

(ii) $\delta > r + \dfrac{\theta}{r}$ ならば，$\lambda < 0$ となり負債残高の期待値の動きは発散的である.

これは，主観的割引率が，$r$ や $\dfrac{\theta}{r}$ に比較して十分大きい状況，即ち，債務者が極端に短期志向的である場合は，負債残高の期待値の動きが発散的になることを意味する.

一方，$\kappa$ の水準については，ロピタルの定理を用いれば次のことが分かる．

① $\delta \to \infty$ のとき，$\kappa \to \dfrac{\hat{u}}{r}$，$\lambda \to -r$

このことは，$\theta > 0$ であっても，$\delta$ が非常に大きく短期志向が極めて強い場合，$\theta > 0$ の時の均衡負債残高は $\theta = 0$ の時の均衡負債残高に近づくことを意味する．またこのとき，$\delta > r + \dfrac{\theta}{r}$，即ち，$\lambda < 0$ が成立するから，負債残高の期待値の動きは発散的となる．これは残高重視係数 $\theta$ をゼロにする場合の制御に近づくことを意味する．

フロー変数である償還額と異なり，残高はストック変数であり，一度負債残高が増加して財政状態が悪化すると，将来にわたって影響する．即ち，残高重視係数をゼロにするということは，将来にわたって影響する財政悪化を無視するという意味で極端な短期志向の制御ポリシーといえる．

② $\delta \to 0$ かつ $\theta \to 0$ のとき，$\kappa \to \dfrac{\hat{u}}{r}$，$\lambda \to -r$

このことは，$\delta$ が小さく長期志向であっても，残高重視係数が十分に小さい場合には，①の場合と同様，残高重視係数をゼロにする場合の制御に近づくことを意味する．

③ $\delta \to 0$ かつ $\theta \to \infty$ のとき，$\kappa \to \hat{x}$，$\lambda \to \infty$

このことは $\delta$ が小さく長期志向かつ残高重視係数が十分に大きい場合，$\theta > 0$ の時の均衡負債残高は望ましい負債残高に素早く近づくことを意味する．

以上，均衡に対して負債残高の期待値の均衡に対する安定条件を整理したものが表 1 である．

<table>
<tr><th>ケース</th><th colspan="3">条　件</th><th>残高の動き</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">(i)<br>残高重視係数<br>$\theta$=0</td><td colspan="2">残高＞均衡負債残高 $\hat{u}/r$</td><td>発散的に増加</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">残高＜均衡負債残高 $\hat{u}/r$</td><td>発散的に減少</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">(ii)<br>残高重視係数<br>$\theta$>0</td><td colspan="2">残高調整速度 $\lambda$ >0</td><td>均衡負債残高 $\kappa$ に収束</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">残高調整速度<br>$\lambda$ <0</td><td>残高＞均衡負債残高 $\kappa$</td><td>発散的に増加</td></tr>
<tr><td>5</td><td>残高＜均衡負債残高 $\kappa$</td><td>発散的に減少</td></tr>
</table>

表 1　均衡に対する負債残高の動き

3.2.　拡張モデル

基本モデルでは，残高や償還額が取り得る範囲に制約を課さなかったが[14]，現実には負債残高や償還額には上限がある．

① 国債残高に「**残高上限** $x_{\max}$」が存在する

$$x_t \le x_{\max}$$

② 償還額に「**償還額上限** $u_{\max}$」が存在する

$$u_t \le u_{\max}$$

と表される．際限なく負債残高を膨張させることが出来る経済主体は存在しないし，償還財源に上限がない経済主体も存在しないのは自明であろう．拡張モデルは，基本モデルにこの 2 つの許容条件を追加したものである．

もし負債残高が残高上限に到達し，その時点で利払い額が償還額上限を上回ったならば，債務者は両方の条件を満たす許容領域で制御を見いだすことはできなくなる．このような制御不能の状態に陥ることを**デフォルト**と定義する[15]．残高上限同様，償還額上限の存在は負債制御を考える上で重要な制約条件となっている．

ここで重要な注意点は，債務者がこの 2 つの許容条件が存在することを認識していたとしても，将来時点におけるその水準を完全に予見できないという現実的な制約があることである．このため，債務者は基本モデル同様に許容条件を完全に予見できないまま負債制御を行うが，制御量や操作量にかかる許容条件がバインディングになって（あるいはそれに接近して）初めて許容条件が明らかになるのである．この点は次節以降で詳しく考察する．

負債残高の上限および償還額の上限は債務者が主観的に定めるものではなく，それぞれの時点において現実に存在する値である．しかし，これらの許容上限はこれ以上残高の増加が許されない状況，またはこれ以上償還額を積み増せない状況にならない限り，予想に基づいて主観的に設定するしかない．債務者が合理的であれば，これら許容上限が存在しないことは非現実的であることを**認識**し，適切に主観的パラメータを**設定**するはずである．

---

14　数学的には，主観的コスト $J$ が有限の値になるよう、操作量 $u_t$ は閉区間 $U$ で値をとる $F_t$ 発展的可測過程であって

$$\forall q \ge 1, \exists M > 0 \ \text{ s.t. } \ E\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} |u_t|^{2q} dt\right] \le M$$

とする許容条件が課せられる（長井（1999）p.130 参照）．しかし現実には，負債残高が発散するケースでは操作量 $u_t$ も発散するため，可積分性を求める制約条件は満たされていない．即ち，負債残高が発散するケースの制御は，数学的に最低限必要な許容制御の条件すら満たしていない．

15　デフォルトを延滞または金融支援を目的とした重要な条件変更と定義する場合，それは債権者からみた定義である．一方，本研究では，デフォルトを債務者が延滞または条件変更を受けざるを得ない制御不能な状態に陥ることと定義する．これはいわば債務者の状態からみた定義である．なお，債務者の財政状態の著しい悪化（例えば債務超過）を以てデフォルトと定義することもある．本研究では，かかる財政状態となっても元利払いが可能な限りはデフォルト発生とはしないが，この場合，期限到来毎の借り換えが認められずに負債上限が期限未到来残高まで引き下げられるため，早晩デフォルト発生が懸念される状態であることに違いはない．

このときは，主観的に設定される負債残高上限を超えた望ましい負債残高を設定することはないし，または主観的に設定される償還額上限を超えた望ましい償還額を設定することもない．

しかし，現実には大きく分けて次の 2 段階レベルの非合理性が存在する．これが後に分析するデフォルト発生要因となる．

**レベル 1 の非合理性**：負債残高上限 $x_{\max}$ ないし償還額上限 $u_{\max}$ が現実的レベルで存在することを債務者は認識している．即ち，発散的に負債残高を増加させると，いずれは負債残高上限と償還額上限に到達することは分かっている．このケースの場合の非合理性は，その予め設定した金額よりも低いレベルに許容上限が存在する点にある．

この場合，$\theta > 0$ の時の均衡負債残高 $\kappa$ が負債残高上限 $x_{\max}$ を上回る可能性があり，そうなった場合，債務者は予想しない残高制約に直面する．さらに残高維持に必要な償還額 $r \times x_{\max}$ が現実の償還額上限 $u_{\max}$ を上回ると，デフォルトが発生する．

なお，レベル 1 の非合理性が存在するケースでは，債務者が発散的な制御をとる主観的パラメータを選択することはない．発散的ケースでは必ず許容条件に抵触することになるからである．

**レベル 2 の非合理性**：これは，債務者が負債残高上限ないし償還額上限があることすら認識していないケースである．あるいは，必要なだけ負債残高を増加させても負債残高上限と償還額上限に到達する可能性は現実的にはほとんどないと考えるときに生じる非合理性である．

レベル 2 の非合理性が存在するケースでは，債務者は発散的制御をとる主観的パラメータを選択する可能性がある．負債残高を発散的に増加させる制御を採用したとしてもデフォルトが現実に発生すると考えないからである．

以上を整理すると，レベル 1 の非合理性は許容上限を認識しつつも設定に問題があるケースであり，レベル 2 の非合理性は許容条件の認識自体に問題があるケースである．

3.2.1.　残高上限の検討

まず，負債残高が残高上限まで増加することになる条件を確認しよう．

表 1 のケース 1 の場合，即ち，

$$\theta = 0 \text{ かつ } x_0 > \frac{\hat{u}}{r}$$

のとき負債残高の期待値は発散的に増加する．このときは，制御ポリシーを改めない限り必ずどこかで残高上限に到達する．

表 1 のケース 4 の場合，即ち，

$$\theta > 0 \text{ かつ } \lambda < 0 \text{ かつ } x_0 > \kappa$$

のときも，同様に負債残高は発散的に増加し，残高上限に到達する．

残高重視係数 $\theta$ がゼロの場合がケース 1 で，残高重視係数がプラスであっても極端な短期志向のため残高調整速度がマイナスになる場合がケース 4 である．

フロー変数である償還額と異なり残高はストック変数であり，一度負債が増加して財政状態が悪化すると，将来にわたってその状況が継続する．即ち，残高重視係数をゼロにするということは，将来にわたる財政悪化を無視するという意味で，ケース 1 の場合もまた短期志向の制御ポリシーといえる．短期志向の制御ポリシーは負債制御を不安定なものにするため，残高が均衡負債残高を上回ってしまうと，ポリシーを変えない限り，その動きは発散的増加となって必ず残高上限に到達してしまうことになる．

ただし，表 1 のケース 3 の均衡安定的な場合でも，$\theta > 0$ の時の均衡負債残高 $\kappa$ が残高上限よりも高い水準にあるときは，残高上限に到達することになる．先に述べたパラメータ $\delta$ と $\theta$ の動きと均衡負債残高 $\kappa$ の動きについて調べた通り，$\kappa$ は概ね望ましい残高と $\theta = 0$ の下での均衡負債残高 $\hat{u}/r$ の間の水準にある．即ち，望ましい残高や均衡負債残高 $\hat{u}/r$ が残高上限を上回るとき，負債残高は上限を超えた均衡負債残高 $\kappa$ に向かって増加を続けることになるのである．

もし，債務者が残高上限を正しく把握していれば，残高重視係数 $\theta$ をゼロにしたり，望ましい残高を残高上限以上に設定した制御を選択することはないであろう．上限を超えた残高を望ましいと考えることは，いくら主観の問題とはいえ合理的でないからである．

しかし，債務者にとって残高上限の予見は非常に困難になる状況が現に存在する[16]．

(i) 次節で論じる通り，将来の残高上限は将来の償還能力とセットで定まる．しかし，償還能力を見積もる上での不確実性は大きく，また合理的な見積もりであっても，必ずしもそれが実現されるとは限らないことから，将来の償還能力の予測は一般に容易ではない．

---

16　例えば，貸し手からのクレジットラインとして残高上限が明示されているにもかかわらず，それを上回る負債残高を望ましいと考えることは不自然かつ不合理である．しかしクレジットラインが明示されていない状況下では，債務者は自らの将来の返済能力の予測をベースに残高上限を予測して行動せざるを得ない．この場合，将来の償還能力の予測はかなり困難であることから，好景気の時期に調達された債務は，不景気に転じたところで，しばしば償還が困難となりデフォルトが発生する．これは望ましくない状況であるが，合理的な経済判断によりこの問題の発生を回避することは難しく，そこにデフォルトが発生する根本的な要因があると考えられる．

(ii) 制度的な総量規制などがある場合を除けば，債権者が早い段階から債務者に対して残高上限を通告するケースはほとんどない．

(iii) 複数の債権者から与信を受けている状況においては，個々の債権者が設定した残高上限の合計が，必ずしも債務者にとっての残高上限になるとは限らない．特に国債や社債発行などによる市場調達の場合は，市場の見方は常に変動するため，市場の総意としての残高上限の予想は困難である．

(iv) 金融環境の変化により，銀行ないし市場の資金供給能力も変化する．その結果，個々の残高上限も引き下がることがある．

(v) 債権者は，債務者自身の信用力の変化を観察し，残高上限を変化させることもある．

(vi) 確率的ノイズにより残高上限に到達する可能性もある．

基本モデルの（2）式は「残高増分＝発生利息－償還額＋確率的ノイズ」という関係を示していた．即ち，残高は確率的ノイズによっても変動するため，確率的ノイズの分散が大きい場合，債務者の意図に反して負債が残高上限に到達することがある．負債残高が残高上限に近ければ近いほど，また確率的ノイズの分散が大きければ大きいほど，負債残高が残高上限に到達する確率は高くなる．しかし，残高が残高上限に近づくほどに負債残高管理が債権者都合により厳格に行われることになり，残高の動きの分散は小さくなる．したがって，現実的には確率的ノイズによる上限到達問題よりも（i）～（v）の問題を検討することが重要であろう．

3.2.2. 償還額上限の検討

もし，負債残高が残高上限に到達したとしても，上限残高に対する利払いが可能であれば，残高上限を超えることにはならず，即座にデフォルトに至ることはない．すなわち**償還能力不等式,**

(3) **残高上限到達時の利払い額≦償還額上限**

が成立することが，デフォルト回避の条件である．この償還能力不等式こそ，残高上限と償還額上限をつなぐ重要な関係である．債権者は残高上限を定めるとき，併せて償還能力不等式の成立を確認することが必須である．

ところで，償還能力不等式の成立を必須として残高上限は定められる必要があるにも関わらず，現実問題として次の事由から償還能力にかかる許容条件を正確に予見できないことから，結果的にこの不等式が成立しなくなりデフォルトが発生することがある．

（i）まず残高が上限に到達したときの償還額上限の予測が容易ではないことが最大の原因である．特に，金融分野においては債務者と債権者の間に情報の非対称性があり，債権者は全ての情報にアクセスできる状況にない．仮に重要な情報にすべてアクセス可能としても，それら情報を用いて簡単に正確な将来予測を行うことは非常に難しい．

（ii）その結果，当初予測しなかった債務者の償還能力の低下に見舞われると，残高上限も引き下げられる．現時点の残高の利払い能力がないとなれば，債務上限は現在残高に近いところまで引き下げられ，リファイナンス時に償還能力不等式が成立しなくなり，デフォルトに至る．リーマン・ブラザーズの破綻に見られるとおり次の（iii）と併せて，これはしばしば観察される問題である．

（iii）債務者の償還能力の低下により債務上限が引き下げられるようなときは，同時に調達金利も急上昇するため，償還能力不等式の左辺の利払い額が急増し，結果として不等式が成立しなくなることがある．しかし，残高上限に近いところでの調達金利の正確な予測は不可能に近い．

3.2.3. デフォルトの回避可能性

以上の検討を踏まえて，許容条件が完全予見できない中でデフォルトの発生をゼロにすることはできない．しかしデフォルトの回避可能性を高める工夫は可能である．

まず残高上限にできるだけ到達しないような制御ポリシーの設定が求められる．

(i) 残高重視係数$\theta$がゼロの場合は，残高重視の制御ポリシーに転換する必要がある．債務者が残高重視係数をゼロとするのは，現在の負債残高と残高上限には相当の距離があり残高を重視した制御を行う必要が殆どないと考えているからである．しかし，残高上限のない負債は現実的にはない．

(ii) 残高重視係数$\theta$がプラスであったとしても，主観的割引率$\delta$が極端に大きい近視眼的な場合は，将来の残高ギャップについて無視するに等しい．このようなときは主観的割引率を抑えて長期志向に転換することが必要となる．しかし，これを実行することは容易ではない．困難に直面した一般政府の負債制御ポリシーの転換には，歳出カットや増税などに対する国民の理解が必要になる．企業の場合も，長期志向経営に対するインセンティブなどの制度設計変更が必要となる．

(iii) 仮に負債残高の動きが収束的で均衡が残高上限を下回っていても，大きな確率的ノイズが加わることで残高が意図せず上限に到達することがある．確率的ノイズは時間的に蓄積していくため，長期間にわたるデフォルト発生のリスクを考えるときは小さな確率的ノイズでも無視できなくなる．確率的ノイズの特性が与えられれば，その到達確率などを精密に計算することはできる．ところが実際は，経済危機のような極端に大きな確率的ノイズの再現性は乏しく，その特性は殆ど知られていない．こうした確率解析に振り回されるより，単純に上限を低く見積もって制御したうえで，次に示すように，残高上限に到達してもデフォルトにならない備えをするほうが現実的である，

残高上限に到達したときでも，償還能力不等式が成立すればデフォルトには至らない．即ち，償還能力不等式が成立するように予め残高上限をかなり低く設定しておけばよい．上記で指摘したデフォルトの発生プロセスでは，償還能力の見積もりが正確でないことが問題であるため，将来の償還額上限の見積もりの精緻化が必要になる．

(iv) 償還額上限を正確に見積もるためには，財務にかかる正確なデータが前提となる．企業の場合は，制度的に信頼性が保証された財務会計データが基本になる．このため経済環境の変化に対応し会計制度の不断の見直しも重要である．近時はこれに加えて，非財務情報を一体でディスクローズする統合報告などの動きも注目されている．政府の場合は財政統計データの信頼性確保が不可欠である．ギリシャ債務危機は，財政統計の不正が危機の発端となった．

(v) データ分析能力の向上が重要であることは言うまでもない．

## 4. 負債制御ポリシーの推計

前節では，残高重視係数，望ましい負債残高，望ましい償還額，主観的割引率という 4 つのパラメータのセットが負債制御ポリシーの主要な属性値であり，これらが取る値によって負債残高が辿る経路の期待値が定まることを明らかにした．

これらはモデル内部の主観的パラメータであって，経済データとして直接的に観察はできない．本研究の第 3 のテーマは，債務者の負債制御ポリシーの定量計測，即ち，主観パラメータの推計である．これにより各債務者の負債制御ポリシーの定量評価や比較が可能となる．

具体的には，負債の実績残高とモデルが与える最適制御残高の動きをグラフにプロットし，2 つのグラフの各期のギャップの平方和が最小となるよう，数値計算によって主観的パラメータの値を少しずつ調整しながら探し求めるのである．一般に，モデルによる理論的な出力値と現実の経済データの観測値の適合が最もよくなるようパラメータの値を探索・調整して定める手法をカリブレーションと呼ぶ (数学付録 (B) 参照)．以下の推計結果は，データ数が少ないという問題を孕むものの，主観的パラメータと負債残高の振る舞いの関係を理解する上で示唆を与えるものである．

### 4.1. 政府債務の制御ポリシー

以下の図は，対名目 GDP 比純負債の実績残高と最適制御を行ったと仮定したときに算出される残高の理論値の動きをプロットしたものである[17]．1990 年のバブル崩壊以降，深刻な景気低迷を経験した日本では，名目 GDP の伸びが抑えられる一方，財政難を反映して国債残高の増加が顕著で，両者の相乗効果としてこの比率の増加は顕著である．このため，発散的制御の傾向が強い．他方，欧米諸国は，2008 年の金融危機まで長期にわたり好景気が持続した結果，名目 GDP が順調に増加し，財政状態は比較的良好で国債残高の増加は抑えられた．このため，金融危機以前は収束的な制御として観察される．しかしながら，それ以降は日本と同様の困難な状況に陥っている．カリブレーションの結果は，こうした全般的な動きに各国の個別事情を反映したものと言える．

ただし，各国の対 GDP 比負債残高と推計されたパラメータを注意深く対比して見ると，スペインに見られるとおり，一見残高重視に見えても，実際はバブル的状況によって生み出された見掛け上のものである場合もある．このように，推計結果の評価は各国の経済事情を踏まえて慎重に行う必要がある．

[17] 以下，政府債務にかかる残高や償還額の単位は，GDP に対するパーセント表示とする．

4.1.1.　日本政府

図 5 は，日本政府の対 GDP 比純負債の実績残高と，最適制御を行ったとしたときの残高の理論値の動きを図にプロットしたものである．主観的パラメータを推計すると，残高重視係数 $\theta$ はゼロであり，望ましい償還額 $\hat{u}$ が－5, 均衡負債残高 $\hat{u}/r$ は－462 と著しく低く，強い発散性がみられる．これは，日本においては増税や支出削減がかなわず，低金利下にもかかわらず財政赤字を長期にわたって余儀なくされ，財政健全化が進まない状況が続いてきたことを反映したものと言える．

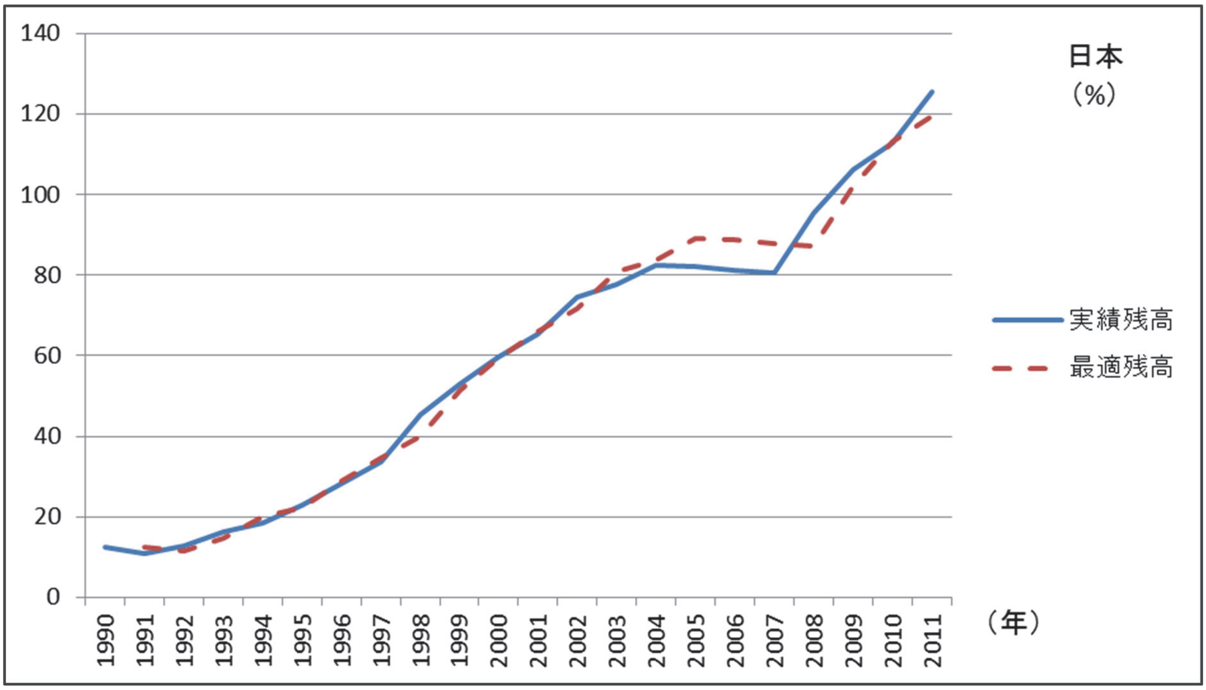



図 5　日本政府の負債残高

（残高重視係数=0，望ましい償還額=－5，均衡負債残高=－462）

4.1.2.　アメリカ政府

図 6 はアメリカ政府の負債残高の動きである．残高重視係数 $\theta$ はゼロ，望ましい償還額 $\hat{u}$ は－6，均衡負債残高 $\hat{u}/r$ は－184 と日本同様著しく低く，強い発散性がみられる．90 年代前半は発散的増加，90 年代後半は発散的減少，そして 2001 年の IT バブルの崩壊以降は，イラク戦争による軍事費の増加も一因となり発散的増加に転じて現在に至っている．特に 2008 年のリーマン・ショック以降発散的な増加傾向は一層顕著になっている．増加・減少を繰り返してはいるが，ここで示した期間においては発散的な傾向が一貫して継続している．

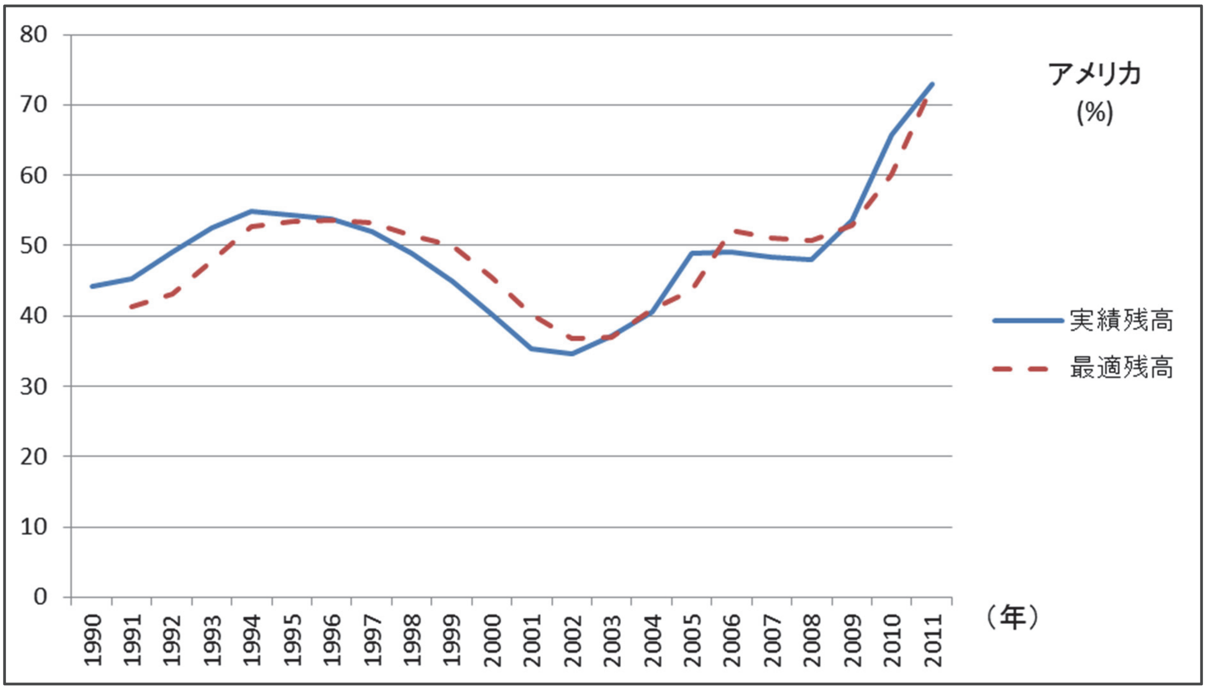



図 6　アメリカ政府の負債残高

（残高重視係数=0，望ましい償還額=－6，均衡負債残高=－184）

4.1.3.　ドイツ政府

図 7 はドイツ政府の負債残高の動きである．残高重視係数$\theta$は 0.04 のプラスとなっており，日米と異なり望ましい残高$\hat{x}$の 51 を考慮に入れた制御が行われている．そこで均衡負債残高$\kappa$の動きをグラフに追加している．この均衡残高$\kappa$と実績残高とのギャップを残高調整速度$\lambda$=14%の年率で縮小させる制御が行われる形になっており，残高の動きは収束的となっている．ドイツでは財政均衡目標の達成が憲法で定められており，保守的な制御ポリシーが厳格に適用されている．

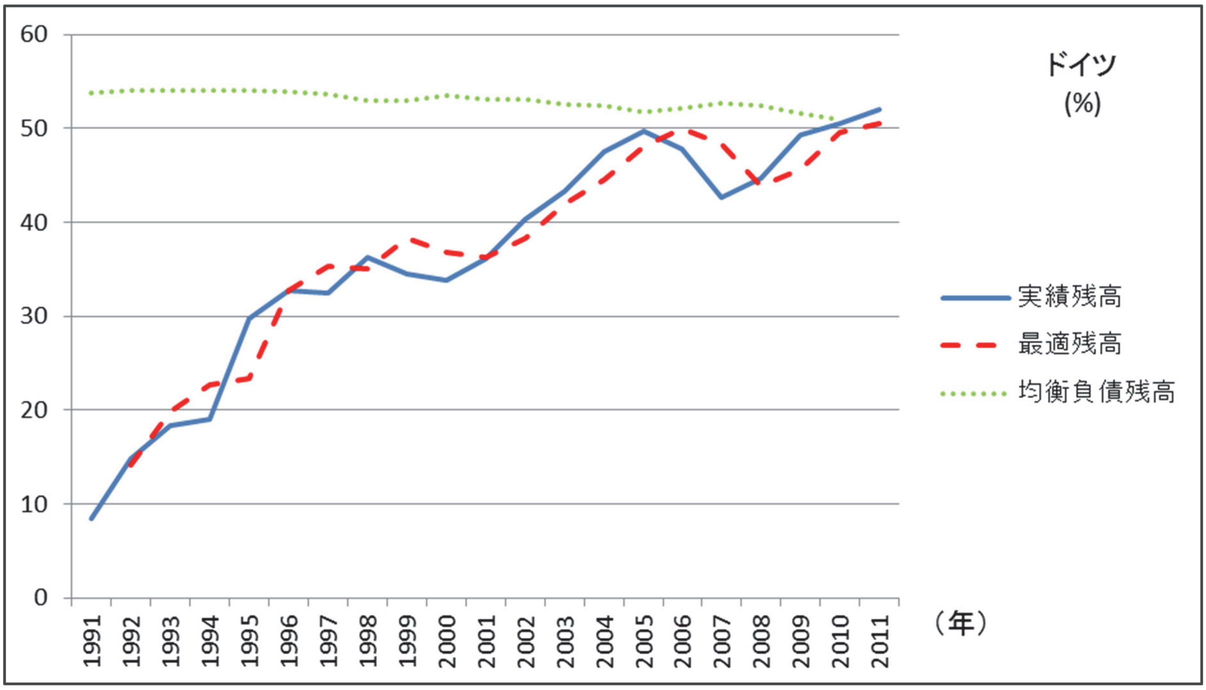



図 7　ドイツ政府の負債残高
（残高重視係数=0.04，望ましい残高=51，望ましい償還額=2，残高調整速度=0.14）

4.1.4.　イタリア政府

図 8 はイタリア政府の負債残高の動きである．ドイツ政府と同様，残高重視係数$\theta$は 1.14 のプラスであり，均衡負債残高$\kappa$は概ね 90 超の水準で安定している．リーマン・ショック後，一時的に残高は増加したが，著しい発散が見られるわけでもない．それにもかかわらず，イタリア国債の信用はギリシャ危機以降大きく低下した．その背景としてイタリア国債の実績残高がドイツに次ぐ高水準にあり，フランスよりも大きいことがある．主として国内消化が中心であったため国内景気に影響を受けやすく，また政権基盤の脆弱さも問題とされている．負債残高が残高上限に近づいていることを強く意識してきた結果として，高い残高重視係数$\theta$の値となってきたと考えられる．

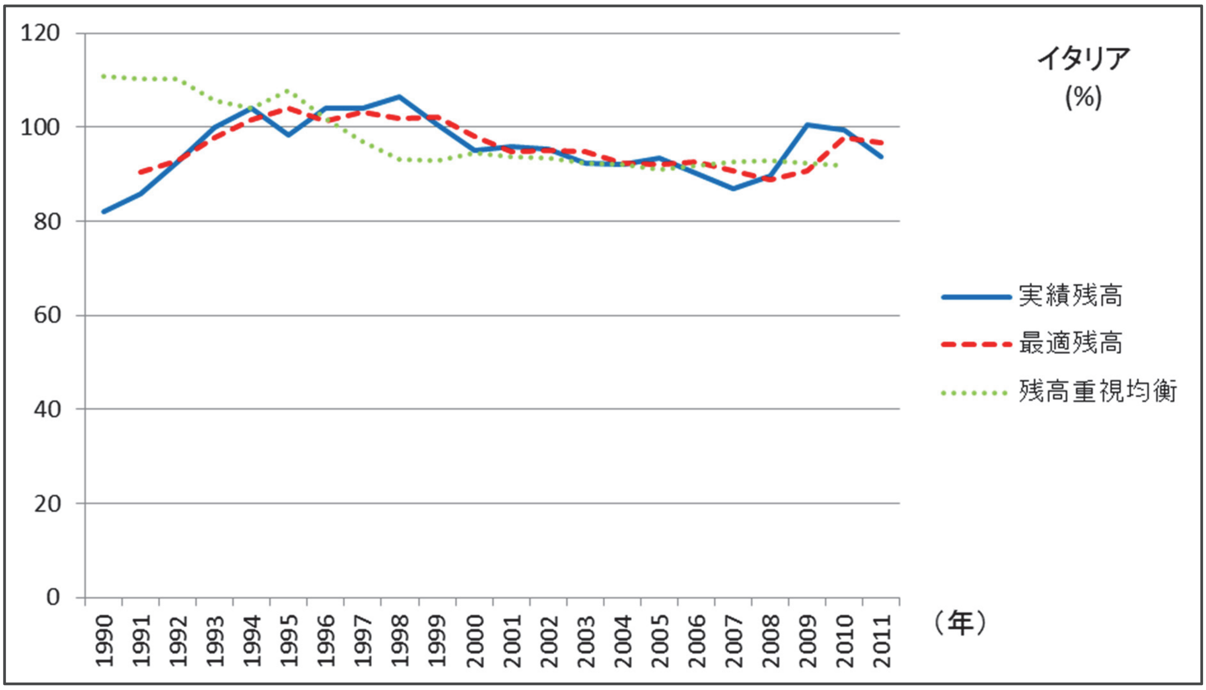



図 8　イタリア政府の負債残高
（残高重視係数=1.14，望ましい残高=65，望ましい償還額=－11，残高調整速度=0.41）

4.1.5.　スペイン政府

図 9 はスペイン政府の負債残高の動きである．残高重視係数 $\theta$ は 1.79 と高くなっている．しかし，スペインの場合は期間的に分割して注意深く観察する必要がある．スペインでは不動産･建設を中心とする内需主導の経済成長が 90 年代後半から 2007 年頃まで続いた結果，対 GDP 比で見た政府純負債が見かけの上では大きく減少してきたことが強く影響して残高重視の制御ポリシーが推計されている．しかし，不動産バブル崩壊後は発散的増加に転じていることが図から見て取れる．

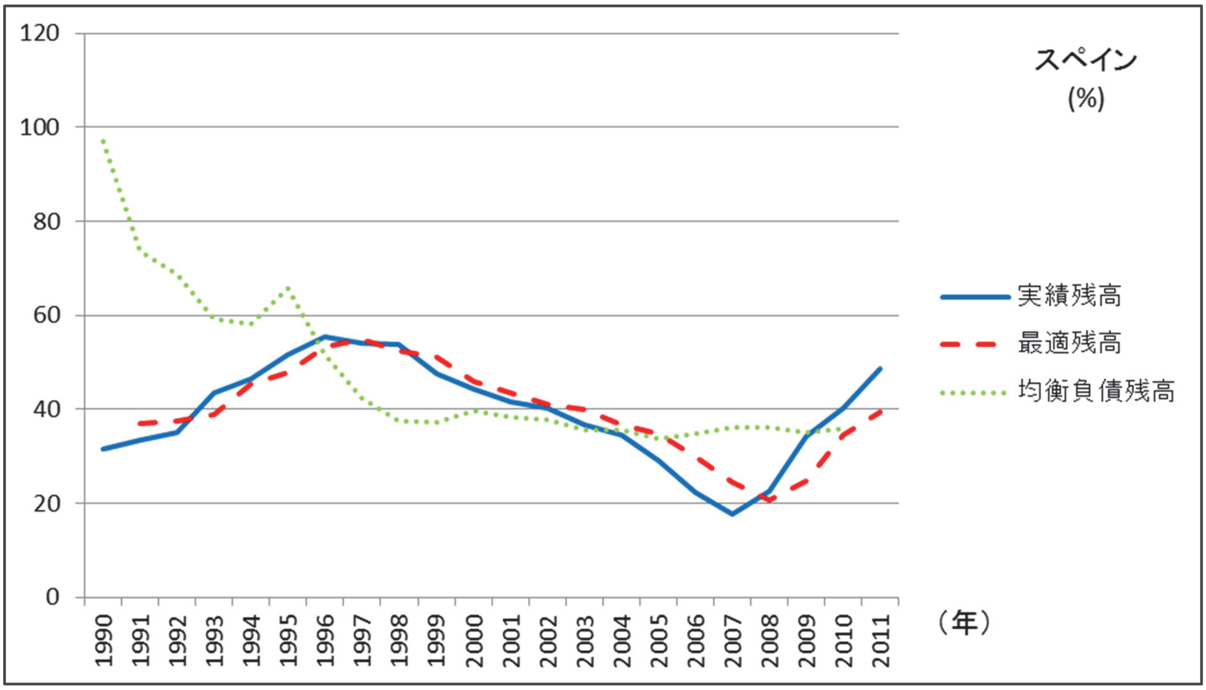



図 9　スペイン政府の負債残高

（残高重視係数=1.79，望ましい残高=555，望ましい償還額=122，残高調整速度=0.18）

4.2.　国内企業

国内企業（一部，二部上場（除く金融業）864 社．連結ベース．1991-2011 年を通じて存続企業[18]）の 1991 年総資産を 1 と基準化して計測した負債残高（長期借入金＋社債残高）について各社ごとにカリブレーションを実行して推計した主観的パラメータの推計結果をまとめたものが表 2 である．

表 2　国内企業の主観的パラメータの推計結果

**(1)残高重視係数 $\theta$ の分布（864 社）**

| $\theta = 0$ | $0 < \theta \le 0.1$ | $0.1 < \theta \le 0.2$ | $0.2 < \theta \le 0.3$ | $0.3 < \theta \le 0.4$ | $0.4 < \theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 17% | 41% | 10% | 5% | 3% | 23% |

**(2)望ましい残高 $\hat{x}$ の分布（715 社※）**

| $\hat{x} < 0$ | $0 \le \hat{x} < 0.25$ | $0.25 \le \hat{x} < 0.5$ | $0.5 \le \hat{x} < 0.75$ | $0.75 \le \hat{x} < 1$ | $1 \le \hat{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 39% | 19% | 13% | 6% | 3% | 20% |

※ 望ましい残高 $\hat{x}$ は残高重視係数 $\theta = 0$ となる企業データを除いて集計

**(3)望ましい償還額 $\hat{u}$ の分布（864 社）**

| $\hat{u} < 0$ | $0 \le \hat{u} < 0.25$ | $0.25 \le \hat{u} < 0.5$ | $0.5 \le \hat{u} < 0.75$ | $0.75 \le \hat{u} < 1$ | $1 \le \hat{u}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 28% | 37% | 11% | 8% | 5% | 11% |

**(4)主観的割引率 $\delta$ の分布（864 社）**

| $0 < \delta \le 0.01$ | $0.01 < \delta \le 0.1$ | $0.1 < \delta \le 1$ | $1 < \delta$ |
|---|---|---|---|
| 58% | 13% | 17% | 13% |

83%の企業で残高重視係数はプラスとなっており，負債残高制御は安定的である．

残高重視係数をプラスとした企業のうち，望ましい残高をマイナスとしている（無借金化を望ましいと考える）企業が 39%に上っているほか，1991 年総資産残高比で負債残高が 0～50%を望ましいとする企業が 32%となっている．

また，望ましい償還額をマイナスとしている（ネットで元本増加による資金調達を望ましいと考える）企業は 28%にとどまっている．

さらに，58%の企業が主観的割引率を 1%以下としている．

逆に，こうした強い残高重視傾向，財政健全化志向が国内企業に長期にわたって継続してきたため，成長投資機会などがあってもそれが資金調達に結びつきにくい状態になっているとも考えられる．

---

18　サンプルには上場企業ゆえのサバイバル・バイアスがあり，国内全企業に比して保守的な負債制御ポリシーが採用されている可能性はある．ただし，これらサンプルからのデフォルト発生可能性をモニタリングすることは経済全体への影響度の観点から極めて重要である．

## 5. おわりに

金融市場は今日の市場経済における重要なインフラストラクチャーであり，社会的共通資本の代表と言える．本稿では，金融市場における主要なプレーヤーである政府や企業を念頭に置いて，債務者の負債制御問題について検討した．そこでの問題意識を要約するならば，債務者は何故負債の適切な制御に失敗するのかという点に尽きる．政府や巨大な金融機関の負債制御の失敗は金融危機などに直結し，経済社会に重大な混乱をもたらす．その根底に存在する問題となる構造を明らかにすることは喫緊の課題と言える．

検討に際しては，債務者の特性に依存しないと同時に，できるだけ単純な負債残高の制御モデルを示すことを目指した．これを通して，今日の負債の制御に関する問題の本質に迫ることが出来たと考えている．即ち，負債の残高と償還額の間のトレードオフ関係の重要さが明らかにされた．そこで決定的な役割を果たすのが，主観的パラメータである残高重視係数$\theta$であり，主観的割引率$\delta$であった．これらのパラメータの良し悪しについて判断することは価値観の問題となるが，これらの組み合わせによっては負債制御が失敗することが示された．

これと同様に，望ましい負債残高$\hat{x}$，望ましい償還額$\hat{u}$という主観的パラメータの果たす役割も大きいことが示される．これらは残高上限$x_{\max}$や償還額上限$u_{\max}$と併せて，デフォルトの発生を考える上で決定的な役割を果たす．政府の負債制御に象徴されるように，民主主義と健全な財政運営の両立は容易ではない．

一度基本となる単純化されたモデルを構築することができて，その基本的な構造が解明されれば，それを債務者のタイプ毎により特定化されたものにすることは比較的容易である．例えば，政府の負債制御を考えるなら，徴税とマクロ経済との関係を組み込むことでより現実的な負債制御モデルの分析が可能となるだろう．しかし，モデルの複雑化の代償として，ここで得られたような明快な解析解を得ることは困難となり，問題の解明は，数値計算を通して得られる数値解の評価に移るであろう．基本モデルが示す解の特性は，そこでも大いに役立つはずである．単純なモデルはそこで得られる明快な論理によって，より複雑なモデルから得られる解をより見通しの良いものとする．

本稿では,負債制御において決定的に重要な役割を持つ4つのパラメータを所与としてモデル分析を行った．しかし，その結果が示唆することは，それらが生み出す負債残高の経路を踏まえて，パラメータの妥当性を改めて問い直し，より良い結果となるように制御問題を修正することであるように思われる．

参考文献

[1]明石一・今井弘之(1981),『詳解制御工学演習』, 共立出版.

[2]伊藤清企画・監修, 渡辺信三・重川一郎編(2012),『確率論ハンドブック』, 丸善出版.

[3]長井英生(1999),『確率微分方程式』, 共立出版.

[4]櫻川昌哉・細野薫(2007), 「日本の財政の維持可能性のカリブレーションによる検証」, Keio Economic Society Discussion Paper Series KESDP No. 07-6.

[5]I. Karatzas and S. E. Shreve(1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition*, Springer.（渡邉壽夫訳(2001),『ブラウン運動と確率積分』, シュプリンガージャパン）

[6]H. Morimoto(2010), *Stochastic Control and Mathematical Modeling, Applications in Economics*, Cambridge University Press.

[7]B. Oksendal(1999), *Stochastic differential equations, An introduction with applications, 5th edition*, Springer.（谷口説男訳(1999),『確率微分方程式－入門から応用まで』, シュプリンガージャパン）

[8]R. Pindyck(1972), “An Application of the Linear Quadratic Tracking Problem to Economic Stabilization Policy”, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 17, pp.287-300.

**数学付録(A)** Linear Quadratic Tracking Gaussian 問題の解

値関数を

(A-1) $$v(t, x_t) = \inf_{\{u_s\}} E\left[\int_t^{\infty} e^{-\delta(s-t)} \frac{1}{2}\left(\theta(x_s - \hat{x})^2 + (u_s - \hat{u})^2\right) ds\right]$$ ただし，$\theta > 0$

と定義する．ベルマン原理よりハミルトン=ヤコビ=ベルマン方程式（HJB 方程式）

(A-2) $$\frac{\partial v}{\partial t} - \delta v + \inf_u \left[\frac{1}{2}\left(\theta(x - \hat{x})^2 + (u - \hat{u})^2\right) + \frac{\partial v}{\partial x}(rx - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = 0$$

が成立する．(A-2)式の$[\ ]$内が下限を取るのは，$u$の値に制約がないとき，

(A-3) $$u - \hat{u} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

である．(A-3)式を HJB 方程式(A-2)に代入すれば

(A-4) $$\frac{\partial v}{\partial t} - \delta v + \frac{1}{2}\left(\theta(x - \hat{x})^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial v}{\partial x}(rx - \hat{u}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

を得る．ここで均衡において値関数は$t$にかかわらず一定であるため$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$となり，方程式(A-4)は

(A-5) $$-\delta v + \frac{1}{2}\left(\theta(x - \hat{x})^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial v}{\partial x}(rx - \hat{u}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

となる．方程式(A-5)は

(A-6) $$v(t, x) = \frac{1}{2}Px^2 + gx + h$$

の形の下で解を持つ. ただし, 値関数は$x$の初期値に関わらず非負であるから$P \geq 0$である. (A-6)式を HJB 方程式(A-5)に代入すれば

(A-7) $$-\delta\left(\frac{1}{2}Px^2 + gx + h\right) + \frac{1}{2}\left(\theta(x - \hat{x})^2 - (Px + g)^2\right) + (Px + g)(rx - \hat{u}) + \frac{1}{2}\sigma^2 P = 0$$

(A-7)が任意の初期値$x$について成立するのは$x$の各次数の係数がゼロ値を取るとき，即ち，

(A-8) $$-\delta P + \theta + 2Pr - P^2 = 0$$

(A-9) $$-\delta g - \theta\hat{x} - P\hat{u} + gr - Pg = 0$$

(A-10) $$-\delta h + \frac{1}{2}\theta\hat{x}^2 - g\hat{u} - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 P = 0$$ 即ち $$h = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}\theta\hat{x}^2 - g\hat{u} - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 P\right)$$

が成立するときである．二次方程式(A-8)の 2 根のうち$P \geq 0$が成立するように

(A-11) $P = r + \dfrac{-\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4\theta}}{2} = r + \lambda > 0$ ただし，$\lambda = \dfrac{-\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4\theta}}{2}$

を $P$ の値として選ぶ．(A-11)式を(A-9)式に代入して $g$ について解けば

(A-12) $g = -\dfrac{P\hat{u} + \theta\hat{x}}{P - r + \delta} = -\lambda\kappa - \hat{u}$ ただし，$\kappa = \dfrac{(r - \delta)\hat{u} + \theta\hat{x}}{(\lambda + \delta)\lambda}$

を得る． $h$ は(A-10)式に(A-6)式，(A-11)式，(A-12)式を代入すれば定まる．(A-3)式に(A-6)式，(A-11)式，(A-12)式を代入すれば状態 $x_t$ が観測されたときの最適償還額 $\gamma_t$ が

(A-13) $\gamma_t = r \times x_t + \lambda(x_t - \kappa)$

に定まる． (A-13)式を運動方程式

$$dx_t = (r \times x_t - \gamma_t)dt + \sigma \times dW_t$$

に代入すれば，確率微分方程式

(A-14) $dx_t = -\lambda(x_t - \kappa)dt + \sigma \times dW_t$

を得る．(A-14)式を $x_t$ について解けば

(A-15) $x_t = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa + \sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$

を得る．なお(A-15)式中の伊藤積分 $\sigma\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}dW_s$ の期待値はゼロである．したがって

(A-16) $E[x_t] = (x_0 - \kappa)e^{-\lambda t} + \kappa$

となる．負債残高が均衡するためには初期値 $x_0$ が $\kappa$ と等しくなる必要がある．このため，$\kappa$ は残高を重視した場合の均衡負債残高を表すものである．

## **数学付録(B)** カリブレーション手法

本論で試みたカリブレーション手法は，端的に言えば，非線形最小二乗法により主観的パラメータ $S$ を推計する手法である．しかしデータ数の制約から十分な精度が確保されているものとは言い難い．

またカリブレーション手法には，次のような数学的曖昧さがある．即ち，主観的パラメータの１つを僅かに変更するとき，負債残高の軌道に対して非線形の変化がもたらされるが，そこでは各々の主観的パラメータが独立した基底をなして負債残高曲線の空間を張ることが暗黙の仮定となっている．しかし，各々のパラメータの変化がもたらす負債残高の曲線の非線形の変化を解析することは容易ではない．データ数が十分に大きいときは，その変化は十分に複雑になり，主観的パラメータが負債残高曲線の空間の独立した基底をなしていると直観的に仮定することが合理化されるが，本研究の場合はこれに該当するとは言い難い．

このように統計的，数学的に厳密性を欠いているものの，複雑なモデルに内在するパラメータの推計用具というカリブレーションが持つ実用上の有用性から，本研究ではこれを推計手法として用いることにした．

$t = t_0, t_1, \cdots, t_n$ の各時点における実際の負債残高データセット

(B-1)　$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

ならびに $t = t_1, t_2, \cdots, t_n$ を期末時点とする各期中における実際の支払金利データセット

(B-2)　$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$

を所与とする．

ここで主観的パラメータのセットについて適当な値を

(B-3)　$S^{(1)} \equiv \{\delta^{(1)}, \hat{x}^{(1)}, \hat{u}^{(1)}, \theta^{(1)}\}$

と定める．

債務者が主観パラメータセット $S^{(1)}$ に基づいて負債残高を最適制御すると仮定するとき，時点 $t = t_k, (k = 0,1,\cdots, n-1)$ における翌期末 $t = t_{k+1}$ の負債残高は(A-16)から

(B-4)　$x^{(1)}_{t_{k+1}} = \left(x_{t_k} - \kappa^{(1)}\right)e^{-\lambda^{(1)}(t_{k+1}-t_k)} + \kappa^{(1)}$

となる．ここで各時点の実際の負債残高と $S^{(1)}$ に基づく最適制御から算出された残高 $x^{(1)}$ の誤差の二乗和を，

(B-5)　$\varepsilon^{(1)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{t_{k+1}} - x^{(1)}_{t_{k+1}}\right)^2$

と二乗誤差を定義する．

以下，適当な最適化計算ツール（例えば，Excel の solver 機能）を用いて，主観的パラ

メータの列

(B-6)　　$S^{(2)}, S^{(3)}, \cdots$

に対応して算出される誤差の二乗和の列

(B-7)　　$\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}, \cdots$

の列が最小値に収束するように主観的パラメータの列を探索する．

数値演算が繰り返された後, 主観的パラメータ $S^{(m)}, S^{(m+1)}$ に対応する二乗誤差の差が適当に定めた収束誤差 $eps > 0$ に対して

(B-8)　　$\left|\varepsilon^{(m+1)} - \varepsilon^{(m)}\right| < eps$

が成立したとき，債務者の主観的パラメータの推計値を

(B-9)　　$S \equiv \left\{\delta, \hat{x}, \hat{u}, \theta\right\} \fallingdotseq \left\{\delta^{(m+1)}, \hat{x}^{(m+1)}, \hat{u}^{(m+1)}, \theta^{(m+1)}\right\}$

と決める．